Retórica e expressividade da matemática

Carlos Tomei
Departamento de Matemática, PUC-Rio
carlos.tomei@gmail.com

Resumo: De uma forma muito superficial o texto pretende situar a atividade matemática entre outras práticas culturais, tanto científicas quanto didáticas. A perspectiva pode inspirar nossa pedagogia.

Palavras-chave: Argumentação, expressividade, epistemologias.

Entre matemáticos há um certo orgulho da expressão clara, lúcida, que leva à pretensão de acreditar que nos anos escolares estamos ensinando a... pensar. Remontando a trilha etimológica da palavra matemática, o que se pode saber? O quotidiano dá sugestões: a argumentação tem seu paralelo nas demonstrações e a urgência de nomear as coisas acompanha a elaboração de conceitos.

Do que falamos, e por quê e quando temos razão? Mais, como nossos recursos expressivos dialogam com outras comunidades? Não é só questão de confrontar epistemologias diversas: duas culturas coexistem frequentemente de forma artificial, e manifestam a experiência matemática de forma quase antagônica — uma acadêmica, científica, outra midiática, pedagógica. Vamos comentar alguns lugares comuns, descrever uma ou outra limitação expressiva.

Não é possível deter-se em questões de natureza filosófica, ser cuidadoso demais com a linguagem: nesse texto forçosamente sucinto e fragmentário, sobreponho exemplos e argumentos. Cito Manin [9], de leitura indispensável:

O desequilíbrio entre vários valores produzido pela ênfase em demonstrações é preocupante. A própria prova é uma consequência da noção de "verdade". E existem outros valores além da verdade, como as "atividades", "beleza"e "compreensão", essenciais a partir do ensino do segundo grau. Um professor erra tragicamente ao negligenciar esses valores.

Seguindo mais uma etimologia, a da palavra teorema, vamos contemplar.

§

O livro da natureza se escreve em linguagem matemática

Aristóteles e Platão já discutiam se matemática servia para descrever o mundo, e a frase lapidar de Galileu resume um ponto de vista. A posição coloca o matemático em posição privilegiada. O debate continua, felizmente.

É um grande alívio que em quase todas as aplicações do quotidiano só precisemos contar, comparar e uma regra de três ocasional. Afinal, um dos méritos que atribuímos à atividade intelectual é uma certa democratização. Não é mais necessário ser um gênio para multiplicar dois números (em algarismos romanos...) ou derivar uma função. Matemática aplicada vai bem, e é abundante fora dos departamentos de matemática. Se os governos reconhecessem progressões geométricas, talvez tivéssemos menos problemas com a previdência social. Um dos problemas de matemática aplicada é a vontade de aplicar.

Reciprocamente, é natural olhar para o mundo procurando por matemática: essa possibilidade sustenta muitas de nossas imagens sobre a intuição. Lendo um artigo de Glaeser ([6]) para um curso de história da matemática, confrontei-me com exemplo interessantíssimo, a regra dos sinais — 'menos vezes menos dá mais'. O assunto passou por debates literalmente milenares até chegar à posição robusta de Hermann Hankel:

> *A revolução realizada por Hankel consiste em abordar o problema de uma perspectiva totalmente diversa. Não se trata mais de extrair da Natureza exemplos práticos que expliquem os números relativos de modo metafórico. Tais números não são mais descobertos, mas inventados, imaginados.*

Em suma, não encontramos razões no mundo para a regra dos sinais, não há nenhuma explicação transcendente. Restou-nos fixar uns poucos axiomas e demonstrá-la. Esse é o preço de nossas limitadíssimas certezas em matemática. E, convenhamos, a ideia grega de axiomatização levou mais tempo para ser digerida do que gostaríamos de admitir.

O dicionário cresce todo dia.

Mas nada como recorrer aos céus para dar substância a Galileu. Hoje, a ideia de uma Terra plana não é considerada sensata. Temos mapas, fotos do planeta, que servem de evidência convincente para o fato de morarmos no que a imaginação ambientalista descreveu como uma astronave pelo Cosmos [8].

Ainda assim, muitos hesitam em se ver num possível universo limitado, para o qual não exista uma grande fronteira, um enorme muro de um novo éter. Apesar de uma esfera mostrar que superfícies podem não ter fronteiras e ainda assim serem limitadas, é necessário um esforço intelectual para conceber a mesma situação para um espaço. E matemáticos fazem sua ginástica mental para se habituar com variedades compactas sem bordo de dimensão arbitrária.

Novas geometrias permitem novas interpretações de nossa visão do mundo físico — a geometria riemanniana, através da relatividade geral, nos tranquilizou quanto à interação a distância decretada por Newton, e que levou a tantos debates. O princípio de Maupertuis, que grosseiramente afirma que os movimentos se dão de forma ótima, foi considerada uma prova metafísica da existência de Deus ([4]), talvez o ponto alto do que chamaríamos de *design inteligente* hoje em dia. Novas lógicas são consideradas por pesquisadores dos fundamentos da mecânica quântica. O livro da natureza talvez esteja em linguagem matemática, mas talvez ainda não a tenhamos alcançado.

Tudo pode ser simplificado por quem entende.

É uma pena, certas coisas são difíceis e exigem esforço cumulativo. Atletas, músicos consideram esse fato óbvio. Alguns alunos não estão convencidos: como nobres de outros séculos, acreditam-se ungidos de uma facilidade de berço, e que bastaria encontrar o recurso pedagógico certo para ativar essa habilidade.

Nem todos seríamos capazes de compor a Nona Sinfonia, nem todo poema merece o nome. Um baixo desempenho não é só pouca competência do didata.

A segunda vez é tão fácil, o assunto deve ser fácil.

Edison e seus assistentes testaram mais de mil substâncias até descobrir que o bambu queimado servia como filamento para lâmpadas incandescentes. Marx achava que essa era uma das dificuldades da ciência: como justificar seu valor, se uma demonstração pronta leva tão pouco tempo comparado com o que foi necessário para encontrá-la? Escondido nesse tema está uma disposição a banalizar o papel da criatividade no pensamento científico. Nem tudo é metodologia.

Jogos são frequentemente repetitivos, assim como o processo de aprendizado. Imagino crianças em dois continentes trocando medidas e descobrindo que América e África se afastam com a velocidade que suas unhas crescem.

Ciência é bom-senso, ou não.

Não basta olhar em volta para que a verdade se revele. Encontrar retângulos pela sala é uma coisa, descobrir que suas diagonais se encontram no centro (e que uso fazer disso) é outra.

Algo mais próximo de uma física moderna surgiu não ao contemplar os objetos que nos cercam, mas entre as coisas do céu, um laboratório sem atrito em que os padrões eram de fato mais simples de observar. Os ângulos de um triângulo real nunca somam cento e oitenta graus, e foi criado um universo paralelo (já existente, como pensariam os platônicos) para exercitar o pensamento matemático. Mais uma vez, a etimologia é esclarecedora: num laboratório se preparam elaborações, situações que não se encontram facilmente na natureza.

Porque números primos são difíceis, fortunas mudam de mãos de forma segura.

Matemática escreve fora do livro da natureza cada vez mais em nosso mundo virtual. A criptografia depende de um segredo para dificultar uma leitura, e por quê não procurar segredos sintéticos na prática matemática? Até porque torna-se possível considerar níveis de dificuldade, limitações expressivas...

E pode-se avançar em uma direção oposta: manter a claridade da mensagem dizendo cada vez menos. O processamento de sinais é tão impregnado em nossa cultura digital que não damos mais conta disso.

É possível convencer uma máquina de que eu sei minha senha bancária sem dar nenhuma informação sobre ela. Joga-se pôquer honestamente pela internet.

Existem mais números entre 0 e 1 do que textos.
Não se pode descrever quase nada, aproximações é o melhor que temos.

De fato, o intervalo $[0,1]$ tem a cardinalidade dos reais, enquanto os textos são apenas enumeráveis: divida-os por tamanho (todo alfabeto é finito, todo texto é finito) e disponha os de mesmo tamanho em ordem alfabética. Os números reais são fantasmagóricos: não podemos falar da maioria dos números, nem sequer descrever suas expansões decimais. Quando enunciamos uma propriedade sobre um número real qualquer, algo especial acontece. Aproximações decimais já basta para as aplicações do mundo físico, e poucas casas bastam.

Nunca vemos números grandes — a maneira como aprendemos a multiplicar na escola é péssima, comparado com a multiplicação através da transformada de Fourier rápida, usada em processamento de sinais. Os números enormes estão em toda a parte, são canções, arquivos de imagens, as manifestações do mundo virtual. Uma redução nos graves, uma alteração de tonalidade, toda filtragem, é uma sequência de operações aritméticas.

Em suma, a linguagem é limitada, extremamente limitada, mesmo para tratar de objetos absolutamente literais, como números, e a vida continua.

O laplaciano está em toda parte. Nosso vocabulário é muito pequeno.

Para alguns, a onipresença do laplaciano é mais uma evidência de inteligência subjacente às coisas. Feynman [5] via nisso a limitação de nosso vocabulário, de tão poucas palavras.

Nem tudo segue de implicações. As explicações são poucas.

A conjetura de Goldbach, estudada há mais de trezentos anos, afirma que todo número par é a soma de dois primos. Para confirmá-la, bastaria ter uma lista contendo decomposições desse tipo para todos os pares. Isso não seria uma demonstração: queremos um texto finito, que nesse caso não foi encontrado. Nesse sentido, uma demonstração é um milagre: uma lista infinita se compacta a algumas palavras. Alguns resultados de Gödel são redemonstrados a partir dessas ideias ([1]): há mais listas (infinitas) expressando verdades do que textos (finitos). Talvez a conjetura de Goldbach seja uma dessas verdades para as quais não há demonstração.

Existem demonstrações matemáticas que nunca foram vistas. Parte da prova do teorema de quatro cores é sua verificação para um conjunto de alguns milhares de mapas realizada algumas vezes, sempre por computadores. A classificação dos grupos simples finitos já foi toda vista por humanos, mas foram necessários muitos. Aviões voam porque engenheiros fazem um balanço muito satisfatório entre cálculos e simulações de natureza não matemática, pelo menos no sentido de linguagem formalizada frequentemente empregado. E é por isso que cada acidente aéreo é estudado com tanto cuidado.

A atividade científica é quase o oposto do que se ouve com frequência: não há certezas, as opiniões mudam às vezes, por mais que a linguagem matemática seja usada extensivamente. E não é que Einstein tenha desbancado Newton: há um bom-senso na coexistência dos dois modelos, que se revelam satisfatórios em ocasiões diferentes, e igualmente insatisfatórios em outras.

Falta 90 noventa por cento da matéria do universo.

E até esse número às vezes muda. E por quê achamos isso? Os astros, para se mover como vemos, precisam de empurrões que não vemos. E dizemos isso porque acreditamos num modelo matemático que talvez não seja o que o Universo esteja... adotando (antropomorfizar é irresistível). Matemáticos e físicos se orgulham do fato que certas especulações foram sugeridas por equações, consideradas suficientemente belas para serem também verdadeiras. E, claro, não precisamos lembrar de todas as vezes que as especulações deram errado.

Previsão, modelagem, séries temporais: além das explicações

Modelagem vem em dois sabores. Usar $f = ma$, é como invocar axiomas adicionais. A prática é tão arraigada que atribuímos uma causalidade no argumento: frequentemente fica a impressão que algo está sendo explicado. Já vi professores se surpreenderem com o fato que em alguns momentos um corpo não tenha velocidade (mas que alívio, a posição existe sempre...). Velocidade é um conceito matemático, e a vida real faz o que bem entende.

Para alunos de graduação de engenharia elétrica, a causalidade associada à ciência é quase acidental. Afinal, os modelos de previsão, empregados em finanças, filtragem, *machine learning*, e outros cenários ainda, abandonaram essa pretensão: imitar bem já é muito satisfatório.

Passe no teste de Turing.

Mas afinal, o que mais há para se tentar dizer com matemática? Ao estudar o conceito de poder computacional, Turing desistiu de tentar definir o que chamamos de pensar e sugeriu em vez o seu famigerado teste: coloque uma pessoa e um computador longe de onde você está e tente identificar quem é quem através de uma conversa com as entidades remotas. Passam as décadas e o teste fica mais difícil - episódios muito interessantes em instâncias reais podem ser lidas em [2]. Aliás, há casos de pacientes que preferiam psicanalistas... mecânicos.

O teste de Turing lembra o texto clássico de Diderot ([3]), em que ele se pergunta se um artista deve sentir o que interpreta, ou se deve aprimorar uma técnica que realize a empatia com seu público.

Os exemplos acima são temas importantes da nossa atividade matemática. É uma pena que não sejam mais conhecidos.

Órbitas planetárias se dispõem como poliedros regulares inscritos.
Átomos de hidrogênio obedecem a uma equação de Schrödinger simples.

A descrição de Kepler das órbitas dos planetas hoje é risível pelo menos entre cientistas. A segunda é mais respeitada. Brinco às vezes com um possível teste vocacional: conte a um jovem que um senhor de longas barbas, sentado numa nuvem, convoca o sindicato de átomos de hidrogênio e impõe, 'obedeçam a essa equação aqui'. O que pareceu mais interessante? O garoto pode se decidir por meteorologia, teologia, ciência política... Não podemos esquecer, estamos cercados por metáfora, a melhor aproximação que temos das coisas, e aqui cito novamente [9]. A ciência, com linguagem matemática ou não, não foge disso. Em muitas situações, de fato, emular um átomo de hidrogênio dá incrivelmente certo. Daí a achar que descobrimos uma verdade fundamental vão milhas: a própria ideia de que estamos nos aproximando desta verdade parece suspeita. Ainda assim algo surpreendente acontece — a imitação funciona muitas vezes. Um artigo clássico é [10] e uma continuação interessante é [7].

O cérebro tem emoções que o coração desconhece.

Convenhamos, Millôr Fernandes tem tanta razão quanto Pascal.

Agradecimentos: O autor agradece subsídios de Capes, CNPq e FAPERJ.

Referências

[1] Chaitin, Gregogy. 1982. Gödel's theorem and Information. *Int. J. of Theor. Phys.* 21, 941-954.

[2] Christian, Brian. 2012. *The most human human*, New York, Anchor Books.

[3] Diderot, Denis. 2006. *Paradoxo sobre o comediante*. Coleção Grandes Obras do Pensamento Universal 54. Editora Escala, São Paulo.

[4] Ekeland, Ivar. 2006. *The best of all possible worlds. Mathematics and destiny.* Chicago, U.Chicago Press.

[5] Feynman, Richard. http://www.feynmanlectures.caltech.edu/

[6] Glaeser, Georges. 1981. Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3: 303-346.

[7] Hamming, Richard W. 1980. The unreasonable effectiveness of mathematics. *Amer. Math. Monthly* 87, 81-90.

[8] Lovelock, J. (2009), *The Vanishing Face of Gaia*, New York, Basic Books.

[9] Manin, Yuri I. Mathematics as Metaphor (1991) *Proceedings of the ICM*, Kyoto, The Mathematical Society of Japan, 1665-1671.

[10] Wigner, Eugene. 1960. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Comm. Pure Appl. Math.* 13: 1- 14.