Princípio do máximo para equações elípticas de segunda ordem e aplicações

Aluno: Matheus Secco Torres da Silva
Orientador: Ricardo Sá Earp

Introdução

Foi feito um estudo inicial sobre princípios do máximo para determinados operadores elípticos de segunda ordem (o laplaciano é o exemplo mais simples). A partir de tais princípios do máximo, deduzimos como aplicação resultados analíticos (problemas de Dirichlet, princípios de compacidade, estimativas a priori) e geométricos (superfícies mínimas e superfícies de curvatura média constante).

Objetivos

Estudar os princípios do máximo (Hopf, no bordo, generalizado, geométricos) e aplicá-los para demonstrar resultados profundos como Teorema dos Três Círculos de Hadamard, Teorema de Bôcher, Teorema tipo Bernstein para Superfícies de Curvatura Média Constante, Teorema de Alexandrov.

Metodologia

Começamos com [1] provando o princípio do máximo de Hopf, o princípio do máximo no bordo, o princípio do máximo generalizado, bem como a partir desses fatos, desenvolvemos princípios do máximo geométricos como: se duas superfícies mínimas são tais que uma está sempre acima da outra e elas se tocam em um ponto, então elas são iguais. Também deduzimos o princípio do máximo para superfícies com curvatura média constante.

A partir desses fatos, provamos alguns teoremas como:

Unicidade do Problema de Dirichlet e existência de solução quando o domínio é um disco. ([1] e [3])

Estimativas das derivadas de funções harmônicas garantindo princípios de compacidade [1]

Princípio de Phragmèn-Lindelöf ([1])

Desigualdades de Harnack ([1])

Teorema de Liouville para operadores uniformemente elípticos com coeficientes limitados em um disco ([2])

Teorema dos Três Círculos de Hadamard ([1])

Teorema de Bocher ([4])

Teorema tipo Bernstein para Superfícies de Curvatura Média Constante: não existe superfície em R^3 de curvatura média constante (não nula) que seja um gráfico completo.

Teorema de Alexandrov: A única superfície compacta mergulhada em R^3 de curvatura média constante (não nula) é a esfera.

Conclusões:

O trabalho consistiu primeiramente em estabelecer princípios do máximo analíticos, por métodos estudados em [1]. A partir disso, deduzimos resultados analíticos importantes, como citado acima. Além disso, mostramos como a análise pode se misturar com a geometria diferencial, formando a análise geométrica, que tem como um dos pilares o Problema de Plateau e é uma das áreas de pesquisa mais ativas atualmente.

Referências

1 - PROTTER, Murray H . WEINBERGER, Hans F. **Maximum Principles in Differential Equations**. 1 ed. New York : Springer-Verlag, 1984. 268p.

2 – GILBARG, David . TRUDINGER, Neil S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Second Edition. Springer –Verlag. 1998. 531p.

3 – EVANS, Lawrence C. **Partial differential equations**. Second Edition. American Mathematical Society. 2010. 758p.

4 – AXLER, Sheldon. BOURDON, Paul. RAMEY, Wade. **Harmonic Function Theory**. Second Edition. Springer-Verlag . 2001. 270p.