Teoria do Grau e aplicações

Clauson Silva e Fillipo Impellizieri
Orientador: Ricardo Sá Earp
Departamento de Matemática, PUC–Rio

31 de Julho de 2012

1 Introdução

Nossa pesquisa foi voltada para o desenvolvimento da teoria do grau de Brouwer, um estudo importante na medida em que possui, como motivações e aplicações, famosos resultados da topologia diferencial e análise. Como exemplos, podemos citar o teorema do ponto fixo de Brouwer e o teorema do ponto fixo de Borsuk. Infelizmente, alguns exemplos e demonstrações foram omitidas desse relatório devido à limitação de 20 páginas.

Começamos o trabalho com o estudo do conceito de homotopia. Exploramos as definições de "tipo de homotopia"de um conjunto, contratibilidade e retrações, estudamos variados exemplos e nos aprofundamos em resultados que envolvem o conjunto $\mathbb{S}^n$. Este conjunto é importante pois um importante teorema de nosso trabalho afirma a não contratibilidade do conjunto $\mathbb{S}^n$, e este resultado é equivalente a uma série de outros resultados relevantes, inclusive o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Os resultados mais motivadores do estudo da teoria do grau de Brouwer são os que envolvem o conceito de ponto fixo de uma aplicação. Assim, na segunda seção definimos e estudamos os conjuntos que possuem a propriedade do ponto fixo, um conceito chave que permite fazer afirmações sobre funções contínuas e seus "zeros". A partir desse momento, nossa pesquisa se dividiu em dois caminho principais: o da Análise Funcional e o da Topologia Diferencial.

A terceira seção é voltada para a Análise Funcional. Estudamos a projeção sobre um conjunto convexo fechado e o funcional de Minkowski, e demonstramos resultados clássicos como os da representação de Riesz-Frechét, de Stampacchia e Lax-Milgram. O Teorema do Ponto fixo de Borsuk é o grande motivador de todo esse estudo, um elo entre a análise funcional, a topologia diferencial, e a teoria do grau. Ele afirma que se $f : \overline{B^{n+1}} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma aplicação suave e antipodal em $\partial\overline{B^{n+1}} = \mathbb{S}^n$, isto é, $f(-x) = -f(x) \;\; \forall x \in \partial\overline{B^{n+1}}$, então f possui um ponto fixo. Com o que desenvolvemos sobre funcionais de Minkowski, podemos estender esse resultado ao fecho de um conjunto aberto, limitado, convexo e simétrico contendo a origem.

Na quarta seção desenvolvemos resultados referentes a Topologia Diferencial. Exploramos o conceito de variedades diferenciáveis e aplicações suaves entre estes conjuntos, inclusive difeomorfismos. Definimos diferenciabilidade nestas aplicações, valores regulares e valores críticos. Assumimos o teorema de Sard e o teorema da aproximação de Weiertrass para provarmos importantes lemas que culminam na demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Terminamos essa seção estudando a orientabilidade das variedades diferenciáveis.

Finalmente, na quinta seção estamos prontos para definir o grau de uma aplicação suave entre variedades num determinado valor regular; e em seguida mostramos que esse grau independe da escolha do valor regular da aplicação. Mostramos também que o grau de uma aplicação é um invariante por homotopia, quer dizer, duas aplicações suaves e homotópicas possuem o mesmo grau. Encerramos nosso trabalho demonstrando que o conjunto $\mathbb{S}^n$ possui um campo suave de vetores tangentes sem singularidades se, e somente se, n é ímpar.

2 Homotopia

Definição: Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicações contínuas. Diremos que f é **homotópica** a g e escrevemos $f \simeq g$ se existe $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ contínua e tal que $\forall x \in X \;\; F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$.

Nesse caso, dizemos que F é **homotopia** entre f e g. Intuitivamente, duas aplicações são homotópicas quando uma pode ser deformada continuamente na outra.

Proposição 1. *A relação de homotopia $\simeq$ é de equivalência.*

Homeomorfismo: Espaços topológicos X e Y são equivalentes (como espaços topológicos) se existem aplicações contínuas $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$ satisfazendo $f \circ g = Id_Y$ e $g \circ f = Id_X$.

Nesse caso, dizemos que f é **homeomorfismo** de X em Y, que g é **homeomorfismo** de Y em X, que X e Y são **homeomorfos** e escrevemos $X \sim Y$. Intuitivamente, assim como homotopias, dois espaços são homeomorfos quando um pode ser deformado continuamente no outro.

Observação 1: Note que, equivalentemente, uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ entre espaços topológicos X e Y é homeomorfismo se for uma bijeção contínua com inversa ainda contínua.

Equivalência de Homotopia: Uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$ entre espaços topológicos X e Y é dita **equivalência de homotopia** se existe $g : Y \longrightarrow X$ contínua e tal que $f \circ g \simeq Id_Y$ e $g \circ f \simeq Id_X$.

Nesse caso, dizemos que X e Y tem **o mesmo tipo de homotopia**, ou que X e Y **são homotopicamente equivalentes**, e escrevemos $X \simeq Y$.

Proposição 2. *A relação de "mesmo tipo de homotopia" $\simeq$ é de equivalência.*

Observação 2: Se X e Y são homeomorfos, é claro que X e Y tem o mesmo tipo de homotopia, mas a recíproca não é verdadeira. Como exemplo, mostraremos que o espaço euclidiano tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto. Esses espaços não são homeomorfos, já que não há bijeção entre eles.

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{R}^n$. Considere $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \{p\}$ a projeção em $\{p\}$ e $g : \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a inclusão em $\mathbb{R}^n$. Então é fácil ver que $f \circ g = Id_{\{p\}} \simeq Id_{\{p\}}$, e que $(g \circ f)(x) = p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Resta então mostrar que $g \circ f \simeq Id_{\mathbb{R}^n}$. Ora, tome $H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$H(x,t) = (1-t) \cdot x + t \cdot p$$

Nesse ponto, fica evidente que H é homotopia entre $g \circ f$ e $Id_{\mathbb{R}^n}$, donde a observação segue.

De fato, a construção de H acima não é particular ao $\mathbb{R}^n$, bastando uma estrutura vetorial para que ela faça sentido. Assim, concluímos que um espaço vetorial qualquer V, não necessariamente de dimensão finita, tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

Contratibilidade: Dizemos que um espaço toplógico X é **contrátil** se X tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

De acordo com a *Observação 2*, temos que equivalentemente X é contrátil se Id_X é homotópica a uma aplicação constante.

Podemos então resumir a *Observação 2* dizendo que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\mathbb{R}^n$ é contrátil, ou mais geralmente que todo espaço vetorial V é contrátil. É claro que precisamos de uma estrutura vetorial na definição de H, mas podemos generalizar esse resultado ainda mais. O mais importante é que o segmento $[p,x] = \{(1-t) \cdot x + t \cdot p,\, t \in [0,1]\}$ esteja contido no contra-domínio envolvido.

Com isso em mente, temos a definição de um **conjunto estrelado**: sejam V espaço vetorial e $A \subset V$. Diremos que A é estrelado se $\exists p \in A$ tal que $\forall x \in A$ o segmento $[p,x] \subset A$. Nesse caso, p é dito **centro de** A. Para um conjunto estrelado, a construção de H como na *Observação 2* ainda faz sentido, e obtemos assim que todo A estrelado é contrátil.

Retração e Retrato: Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$. Uma **retração (de X em A)** é uma aplicação contínua $r : X \longrightarrow A$ com $r\big|_A = Id_A$. Nesse caso, dizemos que A é um **retrato** de X.

Se além disso $i \circ r : X \longrightarrow X$ for homotópica a Id_X, onde $i : A \longrightarrow X$ é a inclusão de A em X, dizemos que A é **retrato por deformação** de X. Nesse caso, é fácil ver que r é equivalência de homotopia, donde A e X tem o mesmo tipo de homotopia.

Por fim, diremos que A é **retrato por deformação forte** de X se os pontos de A forem fixos durante a deformação, isto é, se a homotopia H entre $i \circ r$ e Id_X satisfizer

$$H(a,t) = a \qquad \forall (a,t) \in A \times [0,1]$$

Vamos agora apresentar alguns exemplos que ilustram esses conceitos.

Proposição 3. $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\mathbb{S}^n$ *a esfera n-dimensional é retrato por deformação forte de* $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Demonstração. Defina $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. É fácil ver que r assim definida é de fato uma retração. Considere agora $H : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definida por

$$H(x,t) = (1-t) \cdot x \ + \ t \cdot \frac{x}{\|x\|}$$

Basta verificar que H assim definida é de fato homotopia entre $i \circ r$ e $Id_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$, e que $H(x,t) = x \quad \forall (x,t) \in \mathbb{S}^n \times [0,1]$. □

Proposição 4. $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *tem o mesmo tipo de homotopia de* $\mathbb{R}^{n+1} \setminus L$, *onde* $L = \{(0, \ldots, 0, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$.

Demonstração. Vamos inicialmente mostrar que

$$U = \{x = (x_1, \ldots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ x \neq 0\}$$

é retrato por deformação forte de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus L$. Defina $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus L \longrightarrow U$ por $r(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, 0)$, claramente uma retração. Considere agora $H : \mathbb{R}^{n+1} \setminus L \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus L$ definida por

$$H(x_1, \ \ldots \ , \ x_n, \ x_{n+1}, \ t) = (x_1, \ \ldots \ , \ x_n, \ (1-t) \cdot x_{n+1})$$

Basta verificar que H assim definida é de fato homotopia entre $i \circ r$ e $Id_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus L}$, e que $H(x,t) = x \quad \forall (x,t) \in U \times [0,1]$. Segue que de fato U é retrato por deformação forte de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus L$, donde U e $\mathbb{R}^{n+1} \setminus L$ tem o mesmo tipo de homotopia.

Observe que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e U são naturalmente homeomorfos, e portanto homotopicamente equivalentes. Pela **Proposição ??**, concluímos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\mathbb{R}^{n+1} \setminus L$ tem o mesmo tipo de homotopia. □

Corolário 1. *De acordo com as últimas duas proposições,* $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^{n+2} \setminus L$.

Vamos agora enunciar um importante resultado, cuja demonstração será dada posteriormente.

Teorema 2.1. $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\mathbb{S}^n$ *não é contrátil.*

No intuito de responder essa pergunta, aprofundamos nossos estudos na homotopia do $\mathbb{S}^n$. Apresentamos alguns resultados aqui.

Campo vetorial tangente: Um **campo vetorial (contínuo) tangente a** $\mathbb{S}^n$ é uma aplicação (contínua) $v : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo $\langle v(x), x\rangle = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{S}^n$.

Dado um tal campo, se $x_0 \in \mathbb{S}^n$ é tal que $v(x_0) = 0$, dizemos que x_0 é singularidade de v.

Proposição 5. *Seja $n \in \mathbb{N}$ ímpar. Então existe campo vetorial v contínuo, tangente a $\mathbb{S}^n$ e sem singularidades.*

Demonstração. Ponha $n = 2k-1$ com $k \in \mathbb{N}$, e para cada $x \in \mathbb{S}^n$ escreva $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k)$ lembrando que $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{2k}$. Tome então $v : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2k}$ definida por $v(x) = (y_1, \ldots, y_k, -x_1, \ldots, -x_k)$. É fácil verificar o resultado. $\square$

Proposição 6. *Seja v campo vetorial contínuo tangente a $\mathbb{S}^n$ e sem singularidades. Então $Id_{\mathbb{S}^n} \simeq \alpha$, onde $\alpha : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ denota a aplicação antípoda $x \mapsto -x$.*

Demonstração. Ponha $w : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ definida por $w(x) = \dfrac{v(x)}{\|v(x)\|}\cdot$ Note que w está bem definida e é contínua, já que v não tem singularidades. Em seguida, defina $H : \mathbb{S}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^n$ por $H(x,t) = x \cdot \cos(t) + w(x) \cdot \sin(t)$. H claramente é contínua, e como $v(x) \perp x \;\; \forall x \in \mathbb{S}^n$, teremos que $\|H(x,t)\| = 1 \;\; \forall (x,t) \in \mathbb{S}^n \times [0,1]$, donde H está bem definida.

Basta observar que H é de fato homotopia entre $Id_{\mathbb{S}^n}$ e α. $\square$

Observe a lista abaixo.

1. n é ímpar
2. $\exists v$ campo vetorial contínuo tangente a $\mathbb{S}^n$ e sem singularidades
3. $Id_{\mathbb{S}^n} \simeq \alpha$

Pelas **Proposições ??** e **??**, temos que (1) $\Rightarrow$ (2) e que (2) $\Rightarrow$ (3). Se pudéssemos mostrar que (3) $\Rightarrow$ (1), então teríamos que são equivalentes (1), (2) e (3). De fato, o são, mas teremos de esperar até que desenvolvamos mais a **Teoria do Grau** para mostrar isso. Vamos então prosseguir com nosso estudo sobre a homotopia do $\mathbb{S}^n$.

Proposição 7. *Seja X um espaço topológico e $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow X$ contínua. Então f admite extensão contínua $\overline{f}$ à bola fechada unitária $B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \; ; \|x\| \leq 1\}$ se e somente se f é homotópica a uma constante.*

Demonstração. Suponha primeiramente que $\overline{f} : B^{n+1} \longrightarrow X$ é extensão contínua de f e defina $H : \mathbb{S}^n \times [0,1] \longrightarrow X$ por $H(x,t) = \overline{f}((1-t)\cdot x)$. Note que H está bem definida pois $\|(1-t)\cdot x\| = |1-t| \leq 1$, já que $x \in \mathbb{S}^n$ e que $t \in [0,1]$. Além disso, $H(x,0) = \overline{f}(x) = f(x)$ em $\mathbb{S}^n$, e $H(x,1) = \overline{f}(0)$, uma constante. Basta então observar que H assim definida é contínua, e portanto é homotopia.

Para a volta, suponha que $H : \mathbb{S}^n \times [0,1] \longrightarrow X$ seja homotopia entre f e uma aplicação constante, com $\forall x \in S^n \;\; H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = k \in X$ e defina $\widetilde{H} : \mathbb{S}^n \times [0,1] \longrightarrow X$ por $\widetilde{H}(x,t) = H(x, 1-t)$. Agora ponha $\overline{f} : B^{n+1} \longrightarrow X$ com

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \widetilde{H}\Big(\frac{x}{\|x\|},\; 2\cdot\|x\| - 1\Big) & \text{se } \|x\| \geq {}^1/_2 \\ k & \text{se } \|x\| < {}^1/_2 \end{cases}$$

Claramente, $\overline{f}$ assim definida é contínua. Basta então verificar que $\overline{f}\big|_{\mathbb{S}^n} = f$, o que completa a demonstração. $\square$

Corolário 2. *Seja Y um espaço topológico e $f,\ g : \mathbb{S}^n \longrightarrow Y$ aplicações contínuas e homotópicas. Então se f admite extensão contínua a B^{n+1}, também g a admite.*

Demonstração. Pela **Proposição ??**, f é homotópica a uma constante. Como homotopia é uma relação de equivalência (pela **Proposição ??**), e em particlar transitiva, também g será homotópica a uma constante. Então, novamente pela **Proposição ??**, g admitirá extensão contínua a B^{n+1}. □

Proposição 8. *Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Então A é retrato de X se e somente se para todo espaço topológico Y e toda aplicação contínua $f : A \longrightarrow Y$, f se estende continuamente a X.*

Demonstração. Suponha primeiro que A seja retrato de X. Seja então Y um espaço topológico qualquer, $f : A \longrightarrow Y$ contínua e r retração de X em A. Basta observar que $f \circ r$ é extensão contínua de f a X.

Suponha agora que $A \subset X$ tenha a propriedade de que para todo espaço topológico Y e toda aplicação contínua $f : A \longrightarrow Y$, f se estende continuamente a X. Considere então $Id_A : A \longrightarrow A$. Aqui, A é tomado como espaço topológico com a topologia induzida por X. Claramente, Id_A é contínua, e por hipótese, Id_A se estende continuamente a $r : X \longrightarrow A$. Nesse ponto, fica claro que a extensão r assim obtida é uma retração de X em A, donde A é retrato de X. □

3 Propriedade do ponto fixo

Sejam X e Y espaços topológicos.

Ponto Fixo: Dada uma aplicação $f : X \longrightarrow X$, diremos que $x \in X$ é **ponto fixo** de f quando $f(x) = x$. Diremos que X tem a **propriedade do ponto fixo** se toda aplicação contínua $f : X \longrightarrow X$ possui um ponto fixo.

Proposição 9. *Sejam X um espaço topológico com a propriedade do ponto fixo e $A \subset X$ subespaço topológico. Se A é um retrato de X, então A possui a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Sejam $r : X \longrightarrow A$ retração e $f : A \longrightarrow A$ uma aplicação contínua. Ponha $g = f \circ r : X \longrightarrow A$. Já que X tem a propriedade do ponto fixo, concluimos que g possui um ponto fixo. Mas $\forall x \in X$, $g(x) \in A$ e portanto todo ponto fixo de g está em A. Como $r\big|_A = Id_A$, todo ponto fixo de g será também ponto fixo de f. Logo, também A possui a propriedade do ponto fixo. □

Proposição 10. *Se X e Y são homeomorfos e X possui a propriedade do ponto fixo, então Y possui a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Sejam $h : X \longrightarrow Y$ homeomorfismo e $f : Y \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Ponha $g = h^{-1} \circ f \circ h : X \longrightarrow X$. Por hipótese, $\exists x_0 \in X$ tal que $g(x_0) = x_0$, donde $f(h(x_0)) = h(g(x_0)) = h(x_0)$, e portanto $h(x_0)$ é ponto fixo de f. □

Enunciaremos agora quatro importantíssimos resultados da nossa pesquisa.

1. **Teorema ??:** $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{S}^n$ *não é contrátil.*
2. **Teorema de Bohl:** *Seja $n \in \mathbb{N}$. Toda aplicação contínua $f : \overline{B^{n+1}} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tem ao menos uma das seguintes propriedades:*

   (i) *f possui um ponto fixo.*
   (ii) *Existem $x \in \mathbb{S}^n$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que $x = \lambda \cdot f(x)$.*
3. **Teorema do Ponto Fixo de Brouwer:** $\forall n \in \mathbb{N}$ $\overline{B^n}$ *possui a propriedade do ponto fixo.*
4. **Teorema de Borsuk:** $\forall n \in \mathbb{N}$ *não existe retração de $\overline{B^{n+1}}$ em $\mathbb{S}^n$.*

Teorema 3.1. *Os teoremas anteriores são equivalentes.*

Demonstração. Vamos mostrar que (1) ⇒ (2), que (2) ⇒ (3), que (3) ⇒ (4) e que (4) ⇒ (1).

$(1) \Rightarrow (2)$: Se não valesse (2), então existiria aplicação contínua $f : \overline{B^{n+1}} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo $f(x) \neq x \quad \forall x \in \overline{B^{n+1}}$ e $x \neq \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in \mathbb{S}^n \ \ \forall \lambda \in (0,1)$.

Defina $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ e $H : \mathbb{S}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^n$ por

$$H(x,t) = \begin{cases} r\big(x - 2 \cdot t \cdot f(x)\big) & \text{se } 0 \ \leq \ t \ \leq \ {}^{1}/_{2} \\ r\Big((2 - 2 \cdot t) \cdot x - f\big((2 - 2 \cdot t) \cdot x\big)\Big) & \text{se } {}^{1}/_{2} \ < \ t \ \leq \ 1 \end{cases}$$

Observe que $x \neq \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in \mathbb{S}^n \ \ \forall \lambda \in [0,1]$, donde H está bem definida.

Basta então verificar que H é homotopia entre $Id_{\mathbb{S}^n}$ e a aplicação constante $r(-f(0)) \in \mathbb{S}^n$, donde $\mathbb{S}^n$ é contrátil, o que contradiz (1).

$(2) \Rightarrow (3)$: Seja $f : \overline{B^{n+1}} \longrightarrow \overline{B^{n+1}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contínua. Temos por hipótese que f satisfaz ao menos um dentre (i) e (ii). Suponha que f satisfaça (ii), isto é, que existem $x \in S^n$ e $\lambda \in (0,1)$ com $x = \lambda \cdot f(x)$. Nesse caso, $\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} > 1$, uma contradição pois $f(x) \in \overline{B^{n+1}}$.

Segue que f não pode satisfazer (ii) e portanto deve satisfazer (i), isto é, f possui um ponto fixo.

$(3) \Rightarrow (4)$: Se não valesse (4), então para algum $n \in \mathbb{N}$ haveria retração de $\overline{B^{n+1}}$ em $\mathbb{S}^n$. Logo, $\mathbb{S}^n$ seria retrato de $\overline{B^{n+1}}$, donde pela **Proposição ??** possuiria a propriedade do ponto fixo.

Assim, toda $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ contínua possuiria um ponto fixo. Basta observar que a aplicação antípoda (dada por $f(x) = -x$) é contínua e não tem ponto fixo, o que caracteriza um absurdo.

$(4) \Rightarrow (1)$: Se não valesse (1), então para algum $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{S}^n$ seria contrátil e portanto $Id_{\mathbb{S}^n}$ seria homotópica a uma aplicação constante. Concluimos então pela **Proposição ??** que $Id_{\mathbb{S}^n}$ se estende continuamente a $r : \overline{B^{n+1}} \longrightarrow \mathbb{S}^n$, donde r seria retração de $\overline{B^{n+1}}$ em $\mathbb{S}^n$, o que contradiz (4). $\square$

O **Teorema ??** é muito importante, pois garante que se mostrarmos que qualquer um dentre (1), (2), (3) ou (4) é verdadeiro, então todos os outros também o são. Naturalmente, se um deles for falso, os outros também serão, mas mostraremos que ocorre o primeiro caso.

É através desse teorema que será demonstrado o **Teorema ?? (1)**; com o desenvolvimento da Teoria do Grau, mostraremos que (3) é verdade, donde os outros seguirão.

4 Análise Funcional

Em nossa pesquisa sobre estruturas com a propriedade do ponto fixo, é claro que nos deparamos com os clássicos Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e Teorema do Ponto Fixo de Borsuk: o primeiro garante que, num espaço vetorial normado de dimensão finita, qualquer bola fechada tem essa propriedade; e o último é o que enunciamos na introdução. Isso nos levou a investigar mais sobre bolas de um espaço vetorial normado, bem como estruturas relacionadas, que preservam a propriedade do ponto fixo. Exemplos incluem espaços homeomorfos a uma tal bola, ou retratos dela.

Nesse contexto, um aprofundamento do nosso estudo em conjuntos convexos se apresentou de forma muito natural, em grande medida porque a convexidade de uma bola num espaço vetorial normado é uma de suas propriedades intrínsecas. Conforme desenvolvemos nosso trabalho, verificamos outras propriedades que são essenciais a esse tipo de estrutura, como a simetria.

Esse foco em conjuntos convexos nos levou a avaliar questões como as respondidas pelas formas geométricas dos Teoremas de Hahn-Banach. Apesar de não incluídas aqui, elas são as grandes motivadoras por trás da segunda parte dessa seção, em que desenvolvemos temas importantes da análise funcional, como espaços duais e reflexivos. Concluimos a seção com três grandes resultados, cujas aplicações incluem a resolução de equações diferenciais parciais lineares elípticas.

Proposição 11. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, $C \subset E$ convexo e $x_0 \in int(C)$. Então $\forall x \in C \ \ \forall t \in (0,1) \quad t \cdot x_0 + (1-t) \cdot x \in int(C)$.*

Demonstração. Sejam $x_1 \in C$, $t \in (0,1)$ e $r(t) = t \cdot x_0 \ + \ (1-t) \cdot x_1$. Suponha por absurdo que $r(t) \notin int(C)$. Nesse caso, $\forall \epsilon > 0 \ \ B_\epsilon(r(t))$ a bola aberta de raio ϵ centrada em $r(t)$ satisfaz $B_\epsilon(r(t)) \not\subset C$.

Como $x_0 \in int(C)$, $\exists \delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset C$. Pela convexidade de C, concluimos então que $K = \{s \cdot x + (1-s) \cdot x_1 \ ; \ x \in B_\delta(x_0) \text{ e } s \in [0,1]\} \subset C$. Agora basta verificar que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(r(t)) \subset K \subset C$, o que evidencia a contradição e conclui a demonstração. Tome $\epsilon = t \cdot \delta$, e seja $y \in B_\epsilon(r(t))$. Vamos mostrar que $y \in K$.

O ponto $x_0 + \frac{1}{t} \cdot (y - r(t))$ pertence a $B_\delta(x_0)$, como é fácil verificar. Agora observe que $t \cdot \left(x_0 + \dfrac{1}{t} \cdot (y - r(t)) \right) + (1-t) \cdot x_1 = t \cdot x_0 + y - r(t) + (1-t) \cdot x_1 = t \cdot x_0 + y - (t \cdot x_0 + (1-t) \cdot x_1) + (1-t) \cdot x_1 = y$, donde $y \in K$ (com $x = x_0 + \frac{1}{t} \cdot (y - r(t))$ e $s = t$ na definição de K). $\square$

Teorema 4.1 (Projeção sobre um convexo)**.** *Sejam* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ *um espaço de Hilbert e* $C \subset H$ *um convexo fechado e não-vazio. Então* $\forall x \in H$ *existe um único* $P_C x \in C$*, chamado de* ***projeção de*** x ***em*** C*, satisfazendo*

$$\|P_C x - x\| = \min_{v \in C} \|v - x\| = d(x, C)$$

Além disso, $P_C x$ *é caracterizado por*

$$\langle x - P_C x, v - P_C x \rangle \leq 0 \qquad \forall v \in C$$

Demonstração. Considere $D = \{\|x - z\| \ ; \ z \in C\} \subset \mathbb{R}$. D é limitado inferiormente, pois 0 é cota inferior de D, donde existe $d = \inf D$. Então $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists y_n \in C$ tal que $\|x - y_n\| < d + \frac{1}{n}$.

Isto define sequência $\{y_n\}$ em C. Lembre-se que para normas provenientes de um produto interno (em particular, num espaço de Hilbert) vale a Lei do Paralelogramo:

$$2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) = \|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 \qquad \forall a, b \in H$$

Pondo $a = x - y_n$ e $b = x - y_m$, concluímos que

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2 \cdot (\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4 \cdot \left\| x - \frac{(y_n + y_m)}{2} \right\|^2$$

Pela convexidade de C, temos que $\frac{(y_n + y_m)}{2} \in C$. Assim, lembrando que $d = \inf D$ e que $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \|x - y_n\| < d + \frac{1}{n}$ teremos que $\|y_m - y_n\|^2 < \dfrac{4 \cdot d}{n} + \dfrac{4 \cdot d}{m} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{2}{m^2} \xrightarrow{n,m \longrightarrow \infty} 0$, donde y_n é de Cauchy. Como H é completo (pois é de Hilbert), temos que existe $y = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$. Além disso, como C é fechado e $\forall n \in \mathbb{N} \ \ y_n \in C$, será também $y \in C$. Segue que $\exists y \in C$ tal que $\|x - y\| = d \leq \|x - z\| \quad \forall z \in C$.

Vamos agora mostrar que tal y é único. Suponha que também $w \in C$ é tal que $\|x - w\| = d$; então pela Lei do Paralelogramo (com $a = x - y$ e $b = x - w$), como acima

$$\|w - y\|^2 \leq 2 \cdot (d^2 + d^2) - 4 \cdot d^2 = 0$$

donde $\|w - y\| = 0$, e portanto $y = w$ é único.

Por fim, vamos mostrar a caracterização de $y = P_C x$. Seja $z \in C$ e considere $Q : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(t) = \|x - (t \cdot z + (1-t) \cdot P_C x)\|^2$. Observe que $\forall t \in [0,1] \ \ t \cdot z + (1-t) \cdot P_C x \in C$, pois C é convexo. Expandindo, obtemos que $Q(t) = \|x - P_C x\|^2 + 2 \cdot t \cdot \langle x - P_C x, P_C x - z \rangle + t^2 \cdot \|P_C x - z\|$.

Por outro lado, pelo que já mostramos, sabemos que $Q(0)$ é mínimo, donde deve ser $Q'(0) \geq 0$. Temos que $Q'(t) = 2 \cdot \langle x - P_C x, P_C x - z \rangle + 2 \cdot t \cdot \|P_C x - z\|$ donde será $Q'(0) = 2 \cdot \langle x - P_C x, P_C x - z \rangle \geq 0$, isto é, $\langle x - P_C x, z - P_C x \rangle \leq 0$.

Para a volta, suponha que $y \in C$ seja tal que $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \ \ \forall z \in C$. Então temos que $\langle x - y, y - z \rangle \geq 0 \ \ \forall z \in C$, donde $H : C \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $H(z,t) = \|x - (t \cdot z + (1-t) \cdot y)\|^2$é tal que, para cada $z \in C$ fixado, H é não-decrescente em t (pela expansão de H, como em Q acima).

Em particular, $\forall z \in C \ \ H(z,1) \geq H(z,0)$, isto é, $\forall z \in C \ \ \|x - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$. Segue que y minimiza a distância de x a C, isto é, $y = P_C x$, o que conclui a demonstração. $\square$

Proposição 12. *Sejam* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ *um espaço de Hilbert e* $C \subset H$ *um convexo fechado e não-vazio. Considere* $P_C : H \longrightarrow C$*, que associa a cada* $x \in H$ *sua projeção em* C*. Então* P_C *é lipschitz com constante* 1*, isto é,*

$$\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\| \qquad \forall x, y \in H$$

Em particular, P_C *é contínua.*

Demonstração. Dados $x, y \in H$, temos pela caracterização da projeção (**Teorema ??**) que

$$\langle x - P_C x, z - P_C x\rangle \leq 0 \qquad \forall z \in C \tag{1}$$

$$\langle y - P_C y, z - P_C y\rangle \leq 0 \qquad \forall z \in C \tag{2}$$

Tomando $z = P_C y$ em **(??)** e $z = P_C x$ em **(??)**, e somando as desigualdades resultantes, obtemos que $\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \langle x - y, P_C x - P_C y\rangle$ donde concluimos pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz que $\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\|$. □

Proposição 13. *Sejam* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ *um espaço de Hilbert,* $M \subset H$ *um subespaço vetorial fechado e* $x \in H$*. Então* $P_M x$ *é caracterizado por*

$$\langle x - P_M x, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in M$$

Além disso, o operador $P_M : H \longrightarrow M$*, que associa a cada* $x \in H$ *sua projeção em* M*, é um operador linear, chamado de* ***projeção ortogonal****.*

A fim de obtermos uma caracterização de bolas para uma norma de um espaço vetorial normado, aprofundamos nossos estudos sobre funcionais de Minkowski. Vamos precisar de algumas definições.

Conjuntos Equilibrados Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $S \subset E$. Diremos que S é **equilibrado** se $\lambda S \subset S \ \ \forall \lambda \in [-1, 1]$.

Proposição 14. *Seja* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado. Então se* $S \subset E$ *é equilibrado,* S *é simétrico. Além disso,* S *é convexo e equilibrado se e somente se* S *é convexo e simétrico.*

Demonstração. Por definição, se S é equilibrado será $-S \subset S$. Mas então $-(-S) = S \subset -S$, donde $S = -S$ e portanto S é simétrico.

Pelo que acabamos de mostrar, é claro que S é convexo e equilibrado $\Rightarrow$ S é convexo e simétrico. Suponha então que S é convexo e simétrico e seja $x \in S$. Pela simetria de S, temos que $-x \in S$, e então pela convexidade de S concluímos que $\forall t \in [0, 1] \ \ (1 - t) \cdot x + t \cdot (-x) = (1 - 2 \cdot t) \cdot x \in S$.

Se $\lambda \in [-1, 1]$, então pondo $t = \frac{1-\lambda}{2}$ sai que $t \in [0, 1]$ e que $\lambda = 1 - 2 \cdot t$ donde $\lambda \cdot x = (1 - 2 \cdot t) \cdot x \in S$. O resultado segue. □

Conjuntos absorventes Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $S \subset E$. Diremos que S é **absorvente** se $\forall x \in E \ \ \exists \epsilon > 0 \mid \forall \alpha \in (0, \epsilon] \quad \alpha \cdot x \in S$ ou equivalentemente se $\forall x \in E \ \ \exists \eta > 0 \mid \forall \lambda \geq \eta \quad x \in \lambda S$.

Por exemplo, toda vizinhança da origem é um conjunto absorvente. Observe da definição que se S é absorvente e não-vazio, então $0 \in S$.

Funcional de Minkowski Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $S \subset E$ absorvente e não-vazio. Para cada $x \in E$, defina $A_x = \{\lambda \in (0, \infty) \ ; \ x \in \lambda S\}$. Observe que $A_x \neq \emptyset$ e 0 é sempre cota inferior de A_x. Então $\forall x \in E \ \ \exists \inf A_x$. Defina então

$$\begin{aligned} \rho : \ & E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \rho(x) = \inf A_x \end{aligned}$$

Note que $\forall x \in E \ \ 0 \leq \rho(x) < +\infty$. Tal aplicação é chamada de **funcional de Minkowski de S**.

Proposição 15. *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, $S \subset E$ absorvente e não-vazio e $\rho : E \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional de Minkowski de S. Então $\forall x \in S \;\; \rho(x) \leq 1$.*

Se além disso S é convexo, então $\forall x \in E$ com $\rho(x) < 1$, $x \in S$.

Demonstração. Se $x \in S$, então é claro que $1 \in A_x$, donde $\rho(x) = \inf A_x \leq 1$.

Se S é convexo e $x \in E$ satisfaz $\rho(x) < 1$, pela propriedade do inf temos que $\exists \eta \in [\rho(x), 1]$ com $\eta \in A_x$. Então $x \in \eta S$, isto é, $\eta^{-1} \cdot x \in S$. Como S é absorvente e não-vazio, temos que $0 \in S$. Da convexidade de S, concluímos então que $t \cdot \eta^{-1} \cdot x \in S \;\; \forall t \in [0, 1]$. Como $\eta \leq 1$, tomamos $t = \eta$ e concluimos que $x \in S$. □

Teorema 4.2. *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $C \subset E$ convexo, absorvente e não-vazio. Então ρ o funcional de Minkowski de C satisfaz $\forall x, y \in E \;\; \forall \lambda > 0 \;\; \rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ e $\rho(\lambda \cdot x) = \lambda \;\cdot \rho(x)$. Em particular, $\rho(0) = 0$.*

*Se além disso C é simétrico ou equilibrado (e portanto ambos, pela **Proposição ??**), vale também que $\forall \lambda \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in E \quad \rho(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot \rho(x)$ ou seja, ρ é uma semi-norma.*

Vamos precisar de um lema.

Lema 1. *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, $C \subset E$ convexo e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha + \beta \neq 0$. Então $\alpha C + \beta C = (\alpha + \beta) C$.*

Voltamos agora à demonstração do **Teorema ??**.

Demonstração. Primeiramente, sejam $x, y \in E$, $\alpha \in A_x$ e $\beta \in A_y$. Então pelo **Lema ??**, temos que $x + y \in \alpha C + \beta C = (\alpha + \beta) C$, donde $\alpha + \beta \in A_{x+y}$. Segue que $\forall \alpha \in A_x \;\; \forall \beta \in A_y \;\; \inf A_{x+y} \leq \alpha + \beta$. Concluimos então que $\inf A_{x+y} = \rho(x + y) \leq \inf A_x + \inf A_y = \rho(x) + \rho(y)$.

Seja agora $x \in E$ e $\lambda > 0$. Se $\alpha \in A_x$, então $\rho(x) \leq \alpha$. Certamente, será também $\rho(\lambda \cdot x) \leq \lambda \cdot \alpha$, pois $x \in \alpha C \Rightarrow \lambda \cdot x \in (\lambda \cdot \alpha) C \iff \lambda \cdot \alpha \in A_{\lambda \cdot x}$. Mas então $\rho(\lambda \cdot x) \leq \lambda \cdot \alpha \;\; \forall \alpha \in A_x$. Concluimos então que $\rho(\lambda \cdot x) \leq \lambda \cdot \inf A_x = \lambda \cdot \rho(x)$.

Com isso, teremos que $\rho\left(\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x)\right) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \rho(\lambda \cdot x) \iff \lambda \cdot \rho\left(\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x)\right) = \lambda \cdot \rho(x) \leq \rho(\lambda \cdot x)$ e portanto $\rho(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \rho(x)$.

Suponha agora que C é simétrico ou equilibrado e sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$. Se $\lambda \geq 0$, está provado. Suponha então $\lambda < 0$; temos que $\rho(\lambda \cdot x) = \rho((-\lambda) \cdot (-x)) = -\lambda \cdot \rho(-x) = |\lambda| \cdot \rho(-x)$. Vamos mostrar que nessas condições, $\rho(x) = \rho(-x)$, o que conclui a demonstração. Observe:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \inf\{\alpha \in (0, \infty) \; ; \; x \in \alpha C\} \\ &= \inf\{\alpha \in (0, \infty) \; ; \; x \in \alpha(-C)\} \qquad \text{(pois C é simétrico)} \\ &= \inf\{\alpha \in (0, \infty) \; ; \; -x \in \alpha C\} = \rho(-x) \end{aligned}$$

□

Proposição 16. *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, $C \subset E$ convexo, absorvente e não-vazio e ρ o funcional de Minkowski de C. Defina $K_1 = \{x \in E \; ; \rho(x) < 1\}$e $K_2 = \{x \in E \; ; \rho(x) \leq 1\}$. Então $int(C) \subset K_1 \subset C \subset K_2 \subset \overline{C}$.*

Demonstração. Pela **Proposição ??**, temos já que $K_1 \subset C \subset K_2$. Resta mostrar que $int(C) \subset K_1$ e que $K_2 \subset \overline{C}$.

(1) $int(C) \subset K_1$: Seja $S_n > 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ com $\lim_{n \to \infty} S_n = 1$ e $x \in int(C)$. Ponha $\forall n \in \mathbb{N} \;\; x_n = S_n \cdot x$. É claro que $x_n \longrightarrow x \in int(C)$, donde deve haver $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0 \;\; x_n \in int(C) \subset C$. Nesse caso, $x_{n_0} = S_{n_0} \cdot x \in C$, e portanto $x \in {S_{n_0}}^{-1} C \Rightarrow {S_{n_0}}^{-1} \in A_x$.

Como ${S_{n_0}}^{-1} < 1$, temos que $\rho(x) \leq {S_{n_0}}^{-1} < 1$, donde $x \in K_1$.

(2) $K_2 \subset \overline{C}$: Seja $x \in K_2$. Se $\rho(x) < 1$, já está provado. Suponha então $\rho(x) = 1$ e considere $\forall n \in \mathbb{N} \;\; t_n = {S_n}^{-1} \cdot x$. Observe que $t_n \longrightarrow x$. Será $\rho(t_n) = \rho({S_n}^{-1} \cdot x) = {S_n}^{-1} \cdot \rho(x) = {S_n}^{-1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, donde $t_n \in C \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, x é aderente a C e portanto $x \in \overline{C}$. □

Corolário 3. *Na notação da **Proposição ??**, se C é aberto então $C = K_1$ e se C é fechado então $C = K_2$.*

Proposição 17. *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, $C \subset E$ convexo, absorvente e não-vazio. Então ρ o funcional de Minkowski de C é contínuo se e somente se $0 \in int(C)$.*

Além disso, se ρ é contínua então $int(C) = K_1$ e $\overline{C} = K_2$.

Demonstração. Se ρ é contínua, então $K_1 = \rho^{-1}\big((-\infty, 1)\big)$ é aberto. Mas $int(C)$ é o maior aberto contido em C, e pela **Proposição ??** $int(C) \subset K_1 \subset C$. Segue que $int(C) = K_1$. Analogamente, se ρ é contínua, então $K_2 = \rho^{-1}\big((-\infty, 1]\big)$ é fechado. Mas $\overline{C}$ é o menor fechado que contém C, e pela **Proposição ??** $C \subset K_2 \subset \overline{C}$. Segue que $\overline{C} = K_2$.

Provado isso, temos que se ρ é contínua, então $0 \in K_1 = \rho^{-1}\big((-\infty, 1)\big) = int(C)$, pois $\rho(0) = 0$ pelo **Teorema ??**. Resta então mostrar que se $0 \in int(C)$, ρ é contínua.

Suponha que $0 \in int(C)$. Então existe vizinhança U de 0 contida em C, donde $V = int(U)$ é vizinhança de 0 contida em $int(C) \subset K_1$. Segue que $\forall x \in V \ \ \rho(x) < 1$. Se $\epsilon > 0$, então ϵV é vizinhança de 0 tal que $\forall x \in \epsilon V \ \ (\epsilon^{-1} \cdot x) \in V$, donde $\rho(\epsilon^{-1} \cdot x) = \epsilon^{-1} \cdot \rho(x) < 1$ e portanto $\rho(x) < \epsilon$. Segue que ρ é contínua em 0.

Observe que $\rho(x) = \rho\big(y + (x - y)\big) \le \rho(y) + \rho(x - y)$, pelo **Teorema ??**. Podemos então escrever $\rho(x) - \rho(y) \le \rho(x - y)$ e $\rho(y) - \rho(x) \le \rho(y - x)$, donde $-\rho(y - x) \le \rho(x) - \rho(y) \le \rho(x - y)$.

Então fixado $x \in E$, se $y \longrightarrow x$ será $\big(\rho(x) - \rho(y)\big) \longrightarrow 0$, pois ρ é contínua em 0 e $\rho(0) = 0$. Segue ρ é contínua em x, isto é, ρ é contínua. □

Proposição 18. *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $C \subset E$ convexo, absorvente e não-vazio. Se C é limitado, então $\rho(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.*

Demonstração. Suponha que C seja limitado e seja $R > 0$ tal que $C \subset B_R(0)$. Tome $x \in C \setminus \{0\}$ e ponha $\alpha = \frac{\|x\|}{2 \cdot R} > 0$. Se $0 < \beta \le \alpha$, então $x \notin \beta B_R(0)$ pois $\beta^{-1} \cdot x \notin B_R(0)$.

Lembre-se que para conjuntos X, Y quaisquer, vale que $X \subset Y \iff Y^c \subset X^c$. Então se $0 < \beta \le \alpha$, será $x \notin \beta B_R(0) \iff x \in \big(\beta B_R(0)\big)^c \implies x \in \big(\beta C\big)^c \iff x \notin \beta C \implies \beta \notin A_x$. Daí que $\rho(x) = \inf A_x \ge \alpha > 0$, ou seja, $x \neq 0 \Rightarrow \rho(x) \neq 0$, o que é equivalente à proposição. □

Teorema 4.3. *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $C \subset E$ aberto, convexo e simétrico com $0 \in C$. Então ρ o funcional de Minkowski de C é uma semi-norma contínua satisfazendo: **(1)** $\exists M > 0$ tal que $\forall x \in E \ \ 0 \le \rho(x) \le M \cdot \|x\|$; e **(2)** $C = \{x \in E \ ; \ \rho(x) < 1\}$.*

Se além disso C é limitado, então ρ é norma em E equivalente a $\|\cdot\|$.

Demonstração. Como C é aberto com $0 \in C$, temos que C é absorvente. Logo, o **Teorema ??** garante que ρ é semi-norma. Como $0 \in int(C)$, a **Proposição ??** garante que ρ é contínua. Além disso, de $0 \in int(C)$ temos que $\exists r > 0$ tal que $B_r(0) \subset C$. Nesse caso, $\forall s$ com $0 < s < r \ \ \overline{B_s(0)} \subset C$ e então $\forall x \in E \ \ \frac{\|x\|}{s} \in A_x$. Segue que $\forall x \in E \ \ \forall s$ com $0 < s < r$, $\ \rho(x) \le \frac{\|x\|}{s}$, donde $\forall x \in E \ \ \rho(x) \le \frac{\|x\|}{r}$. Basta então tomar $M = \frac{1}{r}$ no enunciado do teorema.

Como C é aberto e ρ é contínua, temos pela **Proposição ??** que $C = \{x \in E \ ; \ \rho(x) < 1\} = K_1$.

Se além disso C é limitado, com digamos $R > 0$ tal que $C \subset B_R(0)$, então a **Proposição ??** nos dá que ρ é norma e que $\rho(x) \ge \frac{\|x\|}{2 \cdot R} \ \ \forall x \in E$, ou seja, que $\frac{\|x\|}{2 \cdot R} \le \rho(x) \le M \cdot \|x\| \ \ \ \forall x \in E$. Segue que ρ é norma equivalente a $\|\cdot\|$. □

Vamos agora desenvolver um pouco a mais a teoria sobre espaços de Hilbert.

Espaço Dual: Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. O conjunto $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ dos funcionais lineares contínuos $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, equipado com a norma $\|\cdot\|_{E^*} : \ E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|f\|_{E^*} = \sup \ \{|f(x)| \ ; \ x \in E \text{ e } \|x\| \le 1\}$ é um espaço vetorial normado, chamado de **espaço dual** de E.

Denotamos $(E^*)^*$ também por E^{**}.

Proposição 19. *Sejam* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado e* $f \in E^*$. *Então* $\forall x \in E$ $|f(x)| \leq \|f\|_{E^*} \cdot \|x\|$.

Demonstração. A propriedade claramente vale no caso $x = 0$. Se $x \in E \setminus \{0\}$, então: $|f(x)| = \left| f\left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}\right)\right| = \|x\| \cdot \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \leq \|x\| \cdot \|f\|_{E^*}$. □

Proposição 20. *Dado um espaço vetorial normado* $(E, \|\cdot\|)$, *a aplicação* $J : E \longrightarrow E^{**}$ *que associa a cada* $x \in E$ *o funcional linear* $Jx \in E^{**}$ *que associa a cada* $f \in E^*$ $f(x) \in \mathbb{R}$ *é uma imersão isométrica linear contínua de* E *em* E^{**}.

Observação 3: A aplicação J é chamada de **injeção natural** ou **canônica** de um espaço em seu bidual.

Espaço Reflexivo: Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Diremos que E é **reflexivo** se a injeção canônica $J : E \longrightarrow E^{**}$ é sobrejetiva, isto é, $J(E) = E^{**}$. Nesse caso, J é isometria global e podemos identificar E com E^{**}.

Teorema 4.4. *Todo espaço de Hilbert é refexivo*

A demonstração usa que todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo, algo simples de se provar, e isso implica o teorema. Para demonstrar a implicação, usa-se a teoria de topologias fracas e espaços reflexivos, que foge ao escopo desse estudo. Por isso, omitiremos a demonstração desse resultado.

Teorema 4.5 (Representação de Riesz-Fréchet)**.** *Seja* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ *um espaço de Hilbert. Então* $\forall \phi \in H^*$ $\exists! f \in H$ *tal que* $\phi(u) = \langle f, u\rangle$ $\forall u \in H$. *Além disso,* $\|f\| = \|\phi\|_{H^*}$.

Demonstração. Se $\phi = 0$, é claro que o teorema vale, com $f = 0$. Suponha então $\phi \neq 0$ e ponha $M = \phi^{-1}(0) \neq H$. Afirmamos que M é um subespaço vetorial fechado de H.

Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $x, y \in M$, então $k = a \cdot x + b \cdot y$ satisfaz $\phi(k) = a \cdot \phi(x) + b \cdot \phi(y) = 0$ (pois ϕ é linear) donde $k \in M$. Logo, M é subespaço vetorial. Além disso, M é fechado pois é imagem inversa de um fechado por uma aplicação contínua.

Como $M \neq H$, podemos tomar $\mu \in H \setminus M$ e colocar $g = \dfrac{\mu - P_M\mu}{\|\mu - P_M\mu\|} \in H$, onde $P_M\mu$ é a projeção ortogonal de μ sobre M (**Proposição ??**). Temos pela caracterização da projeção ortgonal que $g \perp v$ $\forall v \in M$. Além disso, é claro que $\|g\| = 1$.

Dado $u \in H$, escrevemos $v = u - \dfrac{\phi(u)}{\phi(g)} \cdot g$, de modo que $\phi(v) = 0$ e portanto $v \in M$. Assim, todo $u \in H$ pode ser escrito como $v + \dfrac{\phi(u)}{\phi(g)} \cdot g$ para algum $v \in M$. Ponha $f = \phi(g) \cdot g \in H$. Então $\forall u \in H$

$$\begin{aligned}\langle f, u\rangle = \langle \phi(g) \cdot g, v + \frac{\phi(u)}{\phi(g)} \cdot g\rangle &= \overbrace{\langle \phi(g) \cdot g, v\rangle}^{0,\text{ pois } g \perp v} + \langle \phi(g) \cdot g, \frac{\phi(u)}{\phi(g)} \cdot g\rangle \\ &= \phi(g) \cdot \frac{\phi(u)}{\phi(g)} \cdot \|g\|^2 = \phi(u) \qquad\qquad (\text{pois } \|g\| = 1)\end{aligned}$$

isto é, $\langle f, u\rangle = \phi(u)$ $\forall u \in H$. Mostramos então a existência de f.

Para a unicidade, observe que se $f, \widetilde{f} \in H$ são tais que $\phi(u) = \langle f, u\rangle = \langle \widetilde{f}, u\rangle$ $\forall u \in H$, então $\langle f - \widetilde{f}, u\rangle = 0$ $\forall u \in H$ donde $f - \widetilde{f} = 0$ e portanto $f = \widetilde{f}$.

Para as normas, se ϕ é dada por $\phi(u) = \langle f, u\rangle$ $\forall u \in H$, então pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|\phi(u)| \leq \|f\| \cdot \|u\|$ $\forall u \in H$, donde $\|\phi\|_{H^*} \leq \|f\|$. No entanto, $\phi\left(\dfrac{f}{\|f\|}\right) = \|f\|$ e $\left\|\dfrac{f}{\|f\|}\right\| = 1$, donde o sup em $\|\phi\|_{H^*} = \sup\ \{|\phi(u)|\ ;\ u \in H \text{ e } \|u\| \leq 1\}$ é alcançado por $\frac{f}{\|f\|}$ em $\|f\|$, o que conclui a demonstração. □

Vamos precisar de algumas definições e uma proposição para o resultado que se segue.

Coercividade: Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $\alpha : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilinear. α é dita **coerciva** se $\exists \lambda > 0$ tal que $\alpha(v,v) \geq \lambda \cdot \|v\|^2 \quad \forall v \in E$.

Simetria: Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $\alpha : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilinear. α é dita **simétrica** se $\forall u, v \in E \;\; \alpha(u,v) = \alpha(v,u)$.

Proposição 21. *Sejam* $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *e* $(Z, \|\cdot\|_Z)$ *espaços vetoriais normados e* $F : X \times Y \longrightarrow Z$ *bilinear. Então* F *é contínua* $\iff \;\; \exists C > 0$ *com* $\|F(x,y)\|_Z \leq C \cdot \|x\|_X \cdot \|y\|_Y \quad \forall x \in X \;\; \forall y \in Y$.

Teorema 4.6 (Stampacchia)**.** *Sejam* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ *um espaço de Hilbert,* $K \subset H$ *convexo, fechado e não-vazio e* $\alpha : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *forma bilinear, contínua e coerciva.*

Então $\forall \phi \in H^* \;\; \exists! u \in K$ *tal que* $\alpha(u, v-u) \geq \phi(v-u) \quad \forall v \in K$.

Além disso, se α *é simétrica então* $u \in K$ *é caracterizado por*

$$\frac{1}{2} \cdot \alpha(u,u) - \phi(u) = \min_{v \in K} \left(\frac{1}{2} \cdot \alpha(v,v) - \phi(v) \right)$$

Demonstração. Para a primeira parte, pela representação de Riesz-Fréchet (**Teorema ??**) vamos mostrar equivalentemente que $\forall f \in H \;\; \exists! u \in K$ tal que $\alpha(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K$.

Para cada $u \in H$ fixado, a aplicação $J_u : H \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $J_u(v) = \alpha(u,v)$ é um funcional linear contínuo. Assim, novamente pela representação de Riesz-Fréchet, existe um único $Au \in H$ tal que $J_u(v) = \alpha(u,v) = \langle Au, v \rangle \;\; \forall v \in H$. Defina então $A : H \longrightarrow H$ que associada a cada $u \in H \;\; Au \in H$ obtido como acima. Observe que A assim definida é linear.

Como α é contínua, temos pela **Proposição ??** que $\exists C > 0$ tal que $|\alpha(u,v)| \leq C \cdot \|u\| \cdot \|v\| \;\; \forall u, v \in H$. Então $\|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = \alpha(u, Au) \leq C \cdot \|u\| \cdot \|Au\| \;\; \forall u \in H$, donde $\|Au\| \leq C \cdot \|u\| \;\; \forall u \in H$ **(1)** e portanto, como aplicação linear que mostramos ser, A é contínua.

Lembre-se que da coercividade de $\alpha \;\; \exists \lambda > 0$ tal que $\langle Au, u \rangle = \alpha(u,u) \geq \lambda \cdot \|u\|^2$ **(2)**.

Buscamos um $u \in K$ satisfazendo $\forall v \in K \quad \alpha(u, v-u) = \langle Au, v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \iff \langle f - Au, v-u \rangle \leq 0$. Se for $r > 0$, então vale que $\forall v \in K \quad \langle f - Au, v-u \rangle \leq 0 \iff \langle r \cdot f - r \cdot Au, v-u \rangle \leq 0 \iff \langle (r \cdot f - r \cdot Au + u) - u, v-u \rangle \leq 0 \iff u = P_K(r \cdot f - r \cdot Au + u)$ pela caracterização da projeção em convexos fechados do **Teorema ??**.

Defina então $S : K \longrightarrow K$ por $S(v) = P_K(r \cdot f - r \cdot Av + v)$. Vamos mostrar que S tem um único ponto fixo $u = P_K(r \cdot f - r \cdot Au + u) \in K$, o que conclui a primeira parte.

Já mostramos com a **Proposição ??** que P_K não aumenta distâncias e portanto $\forall x, y \in K$

$$\begin{aligned} \|S(x) - S(y)\| &= \|P_K(r \cdot f - r \cdot Ax + x) - P_K(r \cdot f - r \cdot Ay + y)\| \\ &\leq \|r \cdot f - r \cdot Ax + x - r \cdot f + r \cdot Ay - y\| = \|(x-y) - r \cdot (Ax - Ay)\| \end{aligned}$$

Assim, lembrando que A é linear e expandindo, obteremos que $\forall x, y \in K$

$$\begin{aligned} \|S(x) - S(y)\|^2 &\leq \|x-y\|^2 - 2 \cdot r \cdot \langle x-y, A(x-y) \rangle + r^2 \cdot \|A(x-y)\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 - 2 \cdot r \cdot \alpha(x-y, x-y) + r^2 \cdot \|A(x-y)\|^2 \\ &\leq \|x-y\|^2 - 2 \cdot r \cdot \underbrace{\lambda \cdot \|x-y\|^2}_{\alpha \text{ é coerciva } \mathbf{(2)}} + r^2 \cdot \underbrace{C^2 \cdot \|x-y\|^2}_{A \text{ é contínua } \mathbf{(1)}} \\ &= \|x-y\|^2 \cdot (r^2 \cdot C^2 - 2 \cdot r \cdot \lambda + 1) \end{aligned}$$

Então se for $0 \leq r^2 \cdot C^2 - 2 \cdot r \cdot \lambda + 1 < 1$, teremos que S será contração. A função $r \mapsto r^2 \cdot C^2 - 2 \cdot r \cdot \lambda + 1$ atinge seu mínimo em $r = \frac{\lambda}{C^2} > 0$, e é fácil verificar que o valor assumido é $1 - \frac{\lambda^2}{C^2}$. Segue que se tomarmos $r = \frac{\lambda}{C^2} > 0$, então S será uma contração e pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, S terá um único ponto fixo $u = S(u) \in K$. Assim, fica demosntrada a existência e unicidade de u.

Se além disso α é simétrica, então é fácil verificar que α define um novo produto interno em H; e que a norma $u \mapsto \|u\|_\alpha = \sqrt{\alpha(u,u)}$ é equivalente à norma $\|\cdot\|$. Nesse caso, $(H, \alpha(\cdot,\cdot), \|\cdot\|_\alpha)$ é também um espaço de Hilbert, e podemos usar a representação de Riesz-Fréchet para deduzir que existe um único $g \in H$ satisfazendo $\phi(v) = \alpha(g,v) \;\; \forall v \in H$. Com isso em mente, encontrar um único $u \in K$ tal que $\forall v \in K \;\; \alpha(u, v-u) \geq \phi(v-u)$ é o mesmo que encontrar um único $u \in K$ satisfazendo $\forall v \in K \;\; \alpha(u, v-u) \geq \alpha(g, v-u) \iff \alpha(g-u, v-u) \leq 0$.

Pela caracterização da projeção em convexos, obtemos que u é a projeção de g em K segundo o novo produto interno $\alpha(\cdot,\cdot)$, e que u é único e minimiza $\min_{v\in K} \sqrt{\alpha(g-v,g-v)}$. Manipulando, temos que u minimiza $\min_{v\in K} \left(\frac{1}{2}\cdot\alpha(v,v) - \phi(v)\right)$ □

Esse teorema exemplifica o poder da teoria de pontos fixos na resolução de problemas, ainda que aparentemente eles não estejam relacionados

Corolário 4 (Lax-Milgram)**.** *Sejam $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ um espaço de Hilbert e $\alpha : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilinear, contínua e coerciva.*

Então $\forall \phi \in H^* \;\; \exists! u \in H$ tal que $\alpha(u,v) = \phi(v) \;\; \forall v \in H$. Além disso, se α é simétrica então $u \in H$ é caracterizado por

$$\frac{1}{2}\cdot\alpha(u,u) - \phi(u) = \min_{v\in H}\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha(v,v) - \phi(v)\right)$$

Demonstração. Aplique Stampacchia (**Teorema ??**) com $K = H$ e obtenha que existe único $u \in H$ com $\alpha(u, v-u) \geq \phi(v-u) \;\; \forall v \in H$. Nesse caso, certamente $\forall v \in H \;\; \forall t \in \mathbb{R} \;\;\; \alpha(u, t\cdot v - u) \geq \phi(t\cdot v - u) \iff t\cdot\big(\alpha(u,v) - \phi(v)\big) \geq \alpha(u,u) - \phi(u)$, e como t varia ao longo de todo $\mathbb{R}$, concluimos que $\alpha(u,v) - \phi(v) = 0$, isto é, $\alpha(u,v) = \phi(v)$. □

5 Topologia Diferencial

Começaremos essa seção com algumas definições necessárias para o desenvolvimento da teoria do grau de Brouwer.

Definições básicas: Sejam $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset \mathbb{R}^l$ abertos. Uma aplicação $f : U \longrightarrow V$ é dita **suave** se todas as derivadas parciais $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_n}}$ existem e são contínuas.

Mais geralmente, dados $X \subset \mathbb{R}^k$ e $Y \subset \mathbb{R}^l$ (não necessariamente abertos), uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é dita **suave** se $\forall x \in X$ existe uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^k$ de x e uma aplicação suave $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^l$ tal que $F\big|_{U\cap X} = f$.

Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é dita um **difeomorfismo** se f é um homeomorfismo entre X e Y e f, f^{-1} são suaves.

Dizemos que $M \subset \mathbb{R}^k$ é uma **variedade suave de dimensão** m ou uma m**-variedade suave** se $\forall x \in M$ existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^k$ de x tal que $W \cap M$ é difeomorfa a um aberto $A \subset \mathbb{R}^m$. Qualquer difeomorfismo $g : A \longrightarrow W \cap M$ é chamado de **parametrização** do aberto $W \cap M$ e $g^{-1} : W \cap M \longrightarrow A$ é chamado de **sistema de coordenadas** para o aberto $W \cap M$.

Espaço tangente a uma variedade: Sejam $M \subset \mathbb{R}^k$ uma variedade suave de dimensão m, $x \in M$ e $g : U \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^k$ parametrização de uma vizinhança $g(U)$ de x, com $g(u) = x$. Pense em g como uma aplicação de U para $\mathbb{R}^k$, e portanto a derivada $dg_u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ está bem definida.

O **espaço tangente** a M no ponto x, denotado por TM_x, é o conjunto imagem de dg_u.

Observação 4: O espaço tangente TM_x não depende da escolha da parametrização e, como imagem de uma transformação linear, é um espaço vetorial. Lembre-se que a derivada de um difeomorfismo é um isomorfiso, e portanto $\dim(TM_x) = m$.

Diferencial de uma aplicação: Considere duas variedades suaves $M \subset \mathbb{R}^k$ e $N \subset \mathbb{R}^l$ e uma aplicação suave $f : M \longrightarrow N$ com $f(x) = y$. Como f é suave, existe um aberto $W \subset \mathbb{R}^k$ contendo x e uma aplicação suave $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^l$ que coincide com f em $W \cap M$. Definimos a **diferencial** $df_x : TM_x \longrightarrow TN_y$ como a restrição de dF_x ao espaço TM_x.

Observação 5: A diferencial df_x não depende da escolha da aplicação F.

Observação 6: Vale a regra da cadeia: $d(g \circ f) = dg_y \circ df_x$

Ponto crítico e ponto regular: Seja $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação suave entre variedades M e N. Diremos que $x \in M$ é **ponto crítico** de f se $df_x : TM_x \longrightarrow TN_y$ não é sobrejetiva; caso contrário, diremos que x é um **ponto regular** de f.

Diremos que $y \in N$ é um **valor crítico** de f se existe um ponto crítico $a \in M$ com $f(a) = y$; caso contrário, diremos que y é um **valor regular** de f.

Proposição 22. *Sejam M e N variedades suaves com M compacta e $f : M \longrightarrow N$ suave. Se $y \in N$ é um valor regular, então $f^{-1}(y)$ é finito.*

Além disso, se R_f é o conjunto dos valores regulares de f, então $g : R_f \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $g(y) = \#\big(f^{-1}(y)\big)$ é localmente constante, isto é, $\forall y \in R_f$ existe vizinhança $V \subset N$ de y tal que $f^{-1}(y)$ e $f^{-1}(k)$ tem a mesma cardinalidade $\forall k \in R_f \cap V$.

Demonstração. Temos que $\forall y \in N \;\; f^{-1}(y)$ é fechado, pois é imagem inversa de um fechado ($\{y\}$) por uma aplicação contínua. Como M é compacta e $f^{-1}(y) \subset M$, também $f^{-1}(y)$ será compacto.

Se $y \in R_f \subset M$, então $f^{-1}(y)$ será também discreto, pois $\forall x \in f^{-1}(y)$ existe vizinhaça $W \subset M$ de x tal que $f\big|_W$ é injetiva. Sabe-se que todo subconjunto discreto de um conjunto compacto é finito. Assim, $f^{-1}(y)$ é finito $\forall y \in R_f$.

Para a segunda afirmação basta tomar $V = \bigcap_{i=1\ldots k} V_i - f(M - \bigcup_{i=1\ldots k} U_i)$, onde os U_i's são vizinhanças disjuntas dos x_i's que são levadas difeomorficamente nos V_i's (índices correspondentes), vizinhanças de y. □

Teorema 5.1 (Sard)**.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ suave e $C = \{x \in U \; ; df_x$ não é sobrejetiva$\}$. Então a imagem $f(C) \subset \mathbb{R}^n$ possui medida de Lebesgue nula.*

Corolário 5. *O conjunto de valores regulares de uma aplicação suave $f : M \longrightarrow N$ é denso em N.*

A seguir definiremos conceitos e demonstraremos alguns fatos úteis para a demonstração do teorema de Brouwer. Assim, estaremos demonstrando todas as afirmações equivalentes do **Teorema ??**.

Daqui em diante M é uma variedade de dimensão m contida em $\mathbb{R}^k$, N é uma variedade de dimensão n contida em $\mathbb{R}^l$ e $m \geq n$.

Lema 2. *Se $f : M \longrightarrow N$ é suave e $y \in N$ é valor regular de f, então o conjunto $f^{-1}(y) \subset M$ é uma variedade suave de dimensão $m - n$.*

Demonstração. Como queremos demonstrar uma propriedade local, podemos tomar $M = \mathbb{R}^m$ e considerar $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^k$. Seja $x \in f^{-1}(y)$. Temos que $df_x : TM_x \longrightarrow TN_y$ é sobrejetiva, donde pelo Teorema do Núcleo-Imagem $Ker(df_x)$ tem dimensão $(m - n)$. Tome então $L : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ linear e não-singular em $Ker(df_x) \subset TM_x \subset \mathbb{R}^k$ e defina $F : M \longrightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$ por $F(k) = (f(k), L(k))$, de modo que $dF_x(v) = (df_x(v), L(v))$ e portanto dF_x é não singular.

Assim, pelo Teorema da Função Inversa, dado $x \in f^{-1}(y)$ existem $U \subset \mathbb{R}^m$ vizinhança de x, $A \subset \mathbb{R}^n$ vizinhança de y e $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ vizinhança de $L(x)$ tais que $F\big|_U$ é difeomorfismo entre U e $A \times W$. Então pondo $F\big|_U = H$, será $H : U \longrightarrow A \times W$ difeomorfismo. Afirmamos que $f^{-1}(y) \cap U = H^{-1}\big(\{y\} \times W\big)$. De fato:

- $k \in f^{-1}(y) \cap U \Rightarrow k \in U$ e $k \in f^{-1}(y) \Rightarrow L(k) \in W$ e $H(k) \in \{y\} \times W \Rightarrow k \in H^{-1}\big(\{y\} \times W\big)$.
- $k \in H^{-1}\big(\{y\} \times W\big) \Rightarrow k \in U$ e $H(k) \in \{y\} \times W \Rightarrow k \in U$ e $f(k) = y \Rightarrow k \in f^{-1}(y) \cap U$

Assim, H leva $f^{-1}(y) \cap U$ difeomorficamente em $\{y\} \times W \sim W$, um aberto de $\mathbb{R}^{m-n}$. Basta observar que essa é a propriedade que define uma variedade de dimensão $m - n$. □

Lema 3. *Nas hipóteses do lema anterior,* $\forall x \in f^{-1}(y)$ $Ker(df_x)$ *é igual ao espaço tangente* $T\big(f^{-1}\big)(y)_x \subset TM_x$.

Demonstração. A aplicação $f\big|_{f^{-1}(y)}$ é constante e portanto $df_x\big|_{f^{-1}(y)} = 0$, donde $Tf^{-1}(y)_x \subset Ker(df_x)$. Como as dimensões de $Tf^{-1}(y)_x$ e $Ker(df_x)$ são iguais, segue então que $T{f^{-1}}_x = Ker(df_x)$. □

Variedades com bordo: $\forall m \in \mathbb{N}$ considere o semi-espaço fechado $H^m = \{(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m \ ; x_m \geq 0\}$. Definimos o **bordo** de H^m como $\partial H^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$.

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^k$ é chamado uma m**-variedade suave com bordo** se cada $x \in X$ possui vizinhança $U \cap X$ difeomorfa a um subconjunto aberto $V \cap H^m$ de H^m. O **bordo** ∂X é o conjunto de todos os pontos em X que correspondem a pontos de ∂H^m sob tal difeomorfismo.

Observação 7: ∂X é uma variedade suave de dimensão $m - 1$ e $X \setminus \partial X$, o **interior** de X, é uma variedade suave de dimensão m.

Observação 8: Em todos esses casos, o espaço tangente à variedade em um ponto é definido como antes.

Lema 4. *Seja* $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *aplicação suave com* 0 *como valor regular. Então o conjunto* $P = \{x \in M \ ; g(x) \geq 0\}$ *é uma variedade suave com bordo* $\partial P = g^{-1}(0)$.

Demonstração. 0 é valor regular de g e $dg_x : TM_x \longrightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva.

Seja N o núcleo de dg_x(que possui dimensão $m - 1$).

Seja $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m-1}$ não singular em $N \subset TM_x \subset \mathbb{R}^k$. Definimos

$$F : M \to \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (L(x), g(x))$$

Assim dF_x é não singular. Dessa forma, pelo teorema da função inversa, $\exists V \subset M$ vizinhança de x tal que V é difeomorfo a W vizinhança de $(L(x), g(x)$.

Seja $x \in P$. Tomamos viz $V \cap P$ que será difeo a uma vizinhança $W \cap H^m$ pois $g(x) \geq 0$. E ainda, se $g(x) = 0$, $F(x) \in \partial H^m$, logo $\partial P = g^{-1}(0)$. □

Teorema 5.2. *Sejam* X *uma* m*-variedade com bordo,* N *uma* n*-variedade com* $m > n$ *e* $f : X \longrightarrow N$ *suave. Se* $y \in N$ *é um valor regular de* f *e de* $f\big|_{\partial X}$*, então* $f^{-1}(y) \subset X$ *é uma* $(m-n)$*-variedade suave com bordo.*

Além disso, o bordo $\partial(f^{-1}(y))$ *é precisamente igual a* $f^{-1}(y) \cap \partial X$.

Demonstração. Como queremos provar uma propriedade local, podemos considerar $X = H^m$ e $N = \mathbb{R}^n$. Seja $x \in f^{-1}(y)$. Temos dois casos:

$x \notin \partial H^m$**:** Então já sabemos do **Lema ??** que x satisfaz a propriedade que define uma m-variedade.

$x \in \partial H^m \Rightarrow x \in \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$**:** Nesse caso, tome $U \subset \mathbb{R}^m$ vizinhança de x sem pontos críticos de f e $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com $g\big|_{U \cap H^m} = f\big|_{U \cap H^m}$. Observe que U não possui pontos críticos de g. Assim, temos que $g^{-1}(y)$ é uma $(m-n)$-variedade em $\mathbb{R}^m$.

Defina $\pi : g^{-1}(y) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\pi(x_1, ..., x_m) = x_m$.

Afirmamos que 0 é valor regular de π.

Se $k \in \pi^{-1}(0) \subset g^{-1}(y)$, certamente será k valor regular de f e de $f\big|_{\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}} := h$.

Temos que $d\pi_k : Tg^{-1}(y)_k \longrightarrow \mathbb{R}$ é também a projeção na última coordenada, pois π é linear. Além disso, $Tg^{-1}(y)_k$ é o núcleo de $dg_x = df_x : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Queremos mostrar que $d\pi_k$ é sobrejetiva e para isso basta mostrar que $Ker(df_k) \not\subset \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$.Suponha por absurdo que $Ker(df^k) \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$.Lembre-se que $Ker(df_k)$ possui dimensão $m-n$.

$dh_k : \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a restrição de df_k, e portanto coincide com df_k. Assim, $Ker(df_k) \subset Ker(dh_k)$. Mas por hipótese, k é valor regular de h, donde $Ker(dh_k)$ possui dimensão $m-n-1$, deixando claro o absurdo.

Portanto pelo **Lema ??**, o conjunto $f^{-1}(y) \cap U = g^{-1}(y) \cap H^m = \{x \in g^{-1}(y) \; ; \; \pi(x) \geq 0\}$ é uma variedade suave com bordo igual a $\partial H^m \cap (U \cap^{-1}(y)) = x \in g^{-1}(y) | \pi(x) = 0$

□

Lema 5. *Seja X uma m-variedade compacta com bordo. Não existe retração de X em ∂X.*

Demonstração. Suponha que f seja tal retração. Seja $y \in \partial X$ um valor regular de f. Temos que y é também um valor regular de $f|_{\partial X}$ que é igual a identidade e isso implica que $f^{-1}(y)$ é uma variedade de dimensão 1 com bordo consistindo em $f^{-1}(y) \cap \partial X = \{y\}$.

Mas $f^{-1}(y)$ é compacta e as únicas variedades compactas de dimensão 1 são uniões disjuntas de circulos e segmentos.(Absurdo).

□

Lema 6. *Qualquer aplicação suave $g : B^n \to B^n$ possui um ponto fixo.*

Demonstração. Suponha que g não tenha pontos fixos. Para $x \in B^n$, seja $f : B^n \to S^{n-1}$ tal que $f(x) = x + ut$, onde $u = \frac{x-g(x)}{||x-g(x)||}$ e $t = -u \cdot x - \sqrt{1 - x \cdot x + (x \cdot u)^2}$. E assim, $f : B^n \to S^{n-1}$ é uma função suave com $f(x) = x$, $\forall x \in S^{n-1}$, o que é absurdo pelo lema 5. □

Agora estamos prontos para demonstrar o Teorema de Brouwer.

Teorema 5.3 (Brouwer)**.** *B^n possui a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Seja $g : B^n \longrightarrow B^n$. Dado $\epsilon > 0$, de acordo com o teorema da aproximação de Weierstrass, existe um polinômio $p_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com $\|p_1(x) - g(x)\| < \epsilon$, $\forall x \in D^n$.

Tomamos, $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ onde $p = \frac{p_1}{\epsilon+1}$. Esse polinômio leva D^n em D^n e $||p(x) - g(x)|| < 2\epsilon$, $\forall x \in D^n$.

Suponha que $g(x) \neq x$, $\forall x \in D^n$. Então a função contínua $||g(x) - x||$ deve possuir um mínimo $\mu > 0$ em D^n.

Escolhendo p tal que $||p(x) - g(x)|| < \mu$, $\forall x \in D^n$. Temos que $p(x) \neq x$, $\forall x \in D^n$.

Portanto, a restrição de $p|_{B^n} : B^n \to B^n$ é uma função suave sem pontos fixos. Isso, diante do lema 6, caracteriza um absurdo.

□

Orientação : Uma **orientação** num espaço vetorial real é uma classe de equivalência entre bases desse espaço, onde duas bases representam a mesma orientação (classe) se, e somente se, o determinante da matriz de mudança de base entre elas é positivo.

Observação: Claramente só existem duas orientações.

Uma variedade suave orientada é uma variedade M junto à escolha de uma orientação para cada espaço tangente TM_x ($x \in M$) com a seguinte condição: Sabemos que para todo $x \in M$, existe vizinhança U de x em M que é difeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^m$ (seja h tal difeomorfismo) Tal condição é que para todo $x \in M$, dh_x é um isomorfismo que leva tal orientação escolhida de TM_x em algum representante da orientação da base canônica. Uma vez determinada a orientação, esta é chama da positiva.

Observação 1: Se M é conexa então M possui exatamente duas orientações.

Observação 2: Cada orientação em M determina a orientação para ∂M da seguinte forma: Seja $x \in \partial M$ .Escolha uma base orientada positiva $(v_1, ..., v_m)$ para TM_x de tal forma que $(v_2, ..., v_m)$ são tangentes a ∂M e v_1 é um vetor que pertence ao meio espaço aberto limitado por $T(\partial M)_x$ (este vetor é chamado exterior).

6 O grau de Brouwer

Sejam M e N variedades orientadas de mesma dimensão n sem bordo, onde M é compacta e N é conexa, e $f : M \to N$ suave.

Grau de uma aplicação: Seja $x \in M$ um ponto regular. Assim, $df_x : TM_x \longrightarrow TN_{f(x)}$ é isomorfismo entre espaços vetoriais orientados. O **sinal** ($sign(df_x)$) de df_x é $+1$ se leva base positiva de TM_x em base positiva de $TN_{f(x)}$ e -1, caso contrário.Para todo $y \in N$ valor regular, definimos o **grau** de f relativo ao valor regular y como:

$$deg(f : y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sign(df_x)$$

Fatos importantes:

Fato 1: $deg(f : y) \in \mathbb{Z}$, para todo valor regular $y \in N$, pois M é compacto e assim f^{-1} é finito.

Fato 2: $deg(f : y)$ é uma função localmente constante em M.

Fato 3:Diante do teorema de Sard conclui-se que $deg(f : y)$ é definido em um conjunto aberto denso de N.

Lema 7. *Seja $M = \partial X$ orientada como bordo de X. Se $f : M \to N$ se estende a uma aplicação suave $F : X \to N$ então $deg(f : y) = 0$ para todo valor regular $y \in M$.*

Demonstração. Suponha que y é um valor regular de F e também de $f = F|_M$.

F^{-1} é variedade compacta de dimensão igual a 1 formada pela união finita de círculos e arcos onde os extremos dos arcos estão em M

Seja $A \subset F^{-1}$ um desses arcos onde $\partial A = \{a, b\}$. Mostraremos que $sign(df_a) + sign(df_b) = 0$ e, portanto, somando para todos os arcos, $deg(f : y) = 0$.

Determinaremos a orientação para A.

Seja $x \in A$ e $(v_1, ..., v_n + 1)$ uma base positivamente orientada de TX_x, com v_1 tangente a A.

v_1 gera $TA_x \subset Ker(df_x)$ pois $TA_x \subset TF^{-1}(y)_x = Ker(dF_x)$. Assim, a imagem de $(v_2, ..., v_{n+1})$ é base de TN_y.

v_1 será a orientação de TA_x se, e somente se, dF_x leva $(v_2, ..., v_{n+1})$ em uma base positivamente orientada de TN_y.

Seja $v_1(x)$ o vetor unitário positivamente orientado tangente a A em x.

$v_1(x)$ é exterior em apenas um dos pontos de ∂A, suponhamos b.
Assim temos,

• $(v_1(a), v_2, ..., v_{n+1})$ é positiva em TX_x. Mas $v_1(a)$ não é exterior e assim $v_2, ..., v_{n+1})$ é negativa em TM_x e é levada em uma base positiva de TN_y pela definição da orientação em A. Logo: $sign(df_a) = -1$.

• $(v_1(b), v_2', ..., v_{n+1}')$ é positiva em TX_x. $v_1(b)$ é exterior e assim $v_2', ..., v_{n+1}')$ é positiva em TM_x e é levada em uma base positiva de TN_y. Logo: $sign(df_a) = +1$.

Assim, $sign(df_a) + sign(df_b) = 0$ e isso acontece para todo os arcos de $F^{-1}(y)$. Logo $deg(f : y) = 0$.

Suponha agora que y não é valor regular de F.

A função $deg(f : y)$ é constante em alguma vizinhança aberta de U de y. Portanto podemos escolher um valor regular(valores regulares são densos) y_0 para F e f no interior de U e observar que $deg(f, y_0) = deg(f, y_0) = 0$.

□

Lema 8. *Considere a homotopia suave $F : M \times [0,1] \to N$ onde $f(x) = F(x,0)$ e $g(x) = F(x,1)$. Então $deg(f : y) = deg(g : y)$ para todo valor regular comum de f e g.*

Demonstração. A variedade $M \times [0,1]$ pode ser orientada como produto e possui bordo $M \times 1$ com a orientação correta e $M \times 0$ com a orientação errada.

Portanto $deg(F|_{\partial(M\times[0,1])})$ em um valor regular y é igual a diferença $deg(g : y) - deg(f : y)$, que é 0 pelo lema 1. □

Isotopia: Sejam $f, g : X \to Y$ difeomorfismos. f e g são **suavemente isotópicas** se existe homotopia suave $F : X\text{x}[0,1] \to Y$ de f para g tal que para todo $t \in [0,1]$ fixado ,$F_t : X \to Y$, onde $F_t(x) = F(x,t)$ para todo $x \in X$, leva X em Y difeomorficamente.

Lema de Homogeneidade: Sejam x e z pontos interiores de uma variedade suave e conexa N. Então existe um difeomorfismo $h : N \to N$ que é suavemente isotópico à identidade e leva y em z.

Teorema 6.1. *$deg(f : y)$ não depende da escolha do valor regular y.*

Demonstração. Sejam y e z valores regulares de f. Sejam $h : N \to N$ difeomorfismo que leva y em z e é isotópico a identidade.

Assim, h preserva orientação e

$$deg(f : y) = deg(h \circ f : h(y))$$

pois h é homotópica a identidade logo $h \circ f$ e homotópica a f e por isso vale

$$deg(f : z) = deg(h \circ f : z)$$

pelo lema 2. Assim,

$$deg(f : y) = deg(f : z)$$

$\square$

Teorema 6.2. *Se f é suavemente homotópica a g então $deg(f) = deg(g)$*

Demonstração. Pelo teorema de Sard existe $y \in N$ tal que é regular para f e g. E dessa forma $deg(f) = deg(g)$, pelo lema 2 e pelo teorema acima. $\square$

Teorema 6.3. *S^n admite um campo suave de vetores tangentes sem singularidades se,e somente se, n é ímpar.*

Demonstração. basta apenas mostrar o sentido $\Rightarrow$.

Seja $v : S^n \to S^n$ um campo suave de vetores tangentes. Podemos supor sem perda de generalidade que v é um campo suave de vetores tangentes unitários.

Seja $a : S^n \to S^n$ a aplicação antípoda e $x \in S^n$. Como a é um difeomorfismo, então qualquer ponto de S^n é regular e $deg(a)$ é +1 ou -1.

Seja ainda $(v_1, ..., v_n)$ uma base positiva de TS^n_x. da_x leva $(v_1, ..., v_n)$ em $(-v_1, ..., -v_n)$ (base de TS^n_{-x}). Temos que TS^n_{-x} e TS^n_x são o mesmo espaço vetorial, porém com orientações opostas. Dessa forma $(-v_1, ..., -v_n)$ é uma base positiva de TS^n_{-x} se, e somente se, n é ímpar. Então podemos enunciar que:

n é ímpar se, e somente se, a aplicação antípoda possui sinal $+1$.

Já vimos que se S^n admite campo suave de vetores tangentes sem singularidades então a antípoda e identidade são suavemente homotópicas. Dessa forma, a aplicação antípoda possui sinal $+1$. E portando n é ímpar.

$\square$

Referências

[M] Milnor, John G. Topology from the Differentiable Viewpoint. Princeton University Press, 1997.

[C] Carmo, Manfredo P. do. Geometria Riemanniana. Projeto Euclides, IMPA: 1988.

[EJ] Outerelo, Enrique; Ruiz, Jesús M. Mapping degree theory. AMS: 2009.

[B] Brézis, Haim. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer: 2011.