# O OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI DISCRETO E APLICAÇÕES EM MALHAS

**Aluno: Alice Herrera de Figueiredo**
**Orientador: Sinésio Pesco**

## Introdução

Em computação gráfica, o operador de Laplace-Beltrami discreto tem diversas aplicações na geração e otimização geométrica de malhas. Entre as principais aplicações podemos destacar a suavização de malhas, edição de malhas, modelagem geométrica, reconstrução geométrica, geração de esqueletos, entre outras. Por essa diversidade de aplicações, e por ser um tema fundamental na área de computação gráfica, optamos por desenvolver um estudo de suas principais propriedades e implementar alguns exemplos que ilustrem essas aplicações.

## Objetivos

O objetivo geral é estudar as propriedades do operador Laplace-Beltrami e sobre malhas. O objetivo específico é aplicar esse operador em um modelo de geração de esqueletos. Aqui usaremos o Laplaciano para realizar uma contração da malha ou de uma nuvem de pontos.

## Metodologia

O projeto se iniciou com um levantamento bibliográfico do assunto, e em seguida um estudo do tema. Após esta introdução ao assunto, partimos para uma implementação computacional de uma das aplicações. Para implementação utilizamos as bibliotecas gráficas OpenGL. Através de reuniões semanais discutimos os principais tópicos do projeto, bem como o acompanhamento do desenvolvimento das atividades computacionais.

A aplicação que utilizamos foi a da Contração Geométrica [1], afim de utilizar o modelo de geração de esqueletos. Esta contração remove detalhes e ruídos da superfície triangular a partir da aplicação do Laplaciano que suaviza a malha. Para realizarmos esta contração aplicamos mínimos quadrados: minimizar || *Ax* - b ||, onde *A* é a matriz abaixo , *x* é o resultado (no caso, as coordenadas dos novos vértices) e *b* é o vetor dos coeficientes conforme descrito abaixo:

A x = b

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_L \mathbf{L} \\ \mathbf{W}_H \end{bmatrix} \mathbf{V}' = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{W}_H \mathbf{V} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{cases} \omega_{ij} = \cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij} & \text{se } (i,j) \in \mathbf{E} \\ \sum_{(i,k)\in E}^{k} -\omega_{ik} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

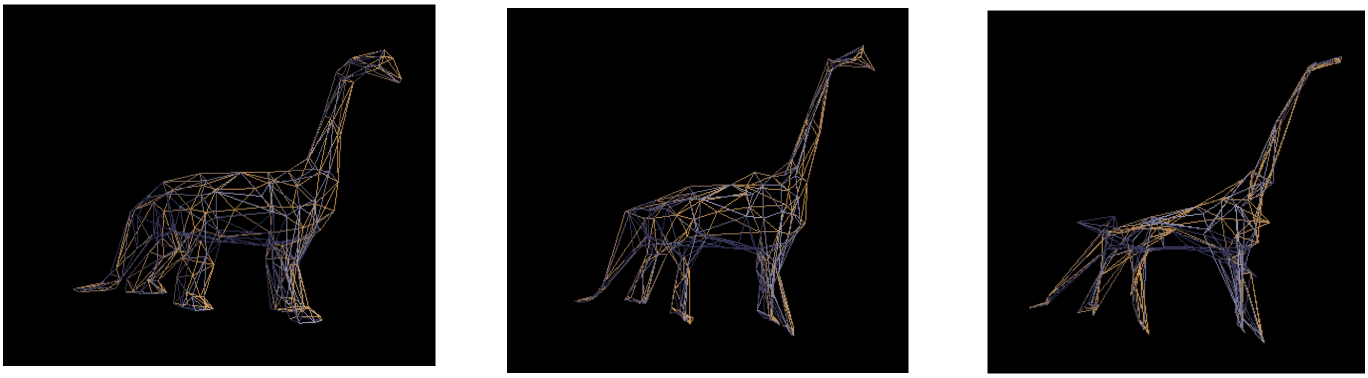
Temos que $W_h$ e $W_l$ são matrizes diagonais e suas condições iniciais são:

$\mathbf{W}_L^0 = 10^{-3}\sqrt{A},$ onde *A* representa a área total da malha

$\mathbf{W}_H^0 = 1.0$

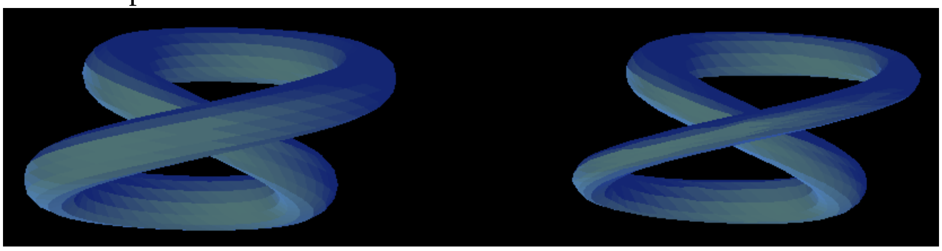
A cada iteração, resolvemos a equação mostrada acima, tendo como resultado os novos vértices, e depois é preciso atualizar os pesos e refazer a matriz $L$ (pelo método Laplaciano):

$$\mathbf{W}_{H,i}^{t+1} = \mathbf{W}_{H,i}^{0}\sqrt{A_i^0/A_i^t}, \qquad \mathbf{W}_L^{t+1} = s_L \mathbf{W}_L^t$$



Inicialmente, o método apresentou resultados somente para malhas com reduzido número de vértices. O principal exemplo foi a malha de um dinossauro em que o números de vértices foi reduzido de 927 vértices para 187. Para outras malhas com um grande número de vértices, encontramos problemas tais como divergência de malha e excessivo esforço computacional. Esses problemas nos levaram a procurar uma nova forma para fazer essa iteração.

Assim, decidimos implementar o método de mínimos quadrados por um processo iterativo e não mais por uma função já pronta da biblioteca GSL [2]. Para isso, utilizamos o algoritmo do método do Gradiente Conjugado [3]. O ponto principal é que a matriz do Laplaciano $L_{ij}$ é uma matriz esparsa e portanto funções como, por exemplo, o cálculo do produto de um matriz por um vetor precisam ser adaptados para explorar esta esparsidade. O exemplo abaixo foi aplicado a uma malha com 1120 vértices.



## Conclusões

A aplicação de contração proposta exige que se adapte os algoritmos para matrizes esparsas. Este trabalho cumpriu dois objetivos importantes: além de estudar os conceitos matemáticos envolvidos, aplicamos esses conceitos no estudo de uma aplicação computacional em modelagem geométrica, com a implementação e avaliação dos resultados obtidos.

## Referências

1 - AU Oscar Kin-Chung, TAI Chiew-Lan, CHU Hung-Kuo, COHEN-OR Daniel, LEE Tong-Yee . Skeleton extraction by mesh contraction. ACM Trans. Graph., v.27, n.3, Article 44, ago. 2008.

2 - www.gnu.org/s/gsl/

3 - BORGES, Catiúscia. Reconstrução de Geometria Baseado na Conectividade e em Amostras da Malha. Dissertação de mestrado, Departamento de Matemática, PUC–Rio, 2007.