OS TRÊS PROBLEMAS GREGOS: UMA INTRODUÇÃO AOS TEOREMAS DE IMPOSSIBILIDADE

Aluna: Ana Luiza Maksoud Elias

Orientador: Sérgio Volchan

Introdução

Foi feito um estudo dos problemas gregos que ficaram conhecidos como duplicação do cubo, trissecção do ângulo e quadratura do círculo. Aparentemente de enunciados simples, são problemas geométricos que envolvem construções utilizando unicamente régua não graduada e compasso.

Cada problema se utiliza de diversos conceitos matemáticos, que estudamos em um primeiro momento. A conclusão da impossibilidade de resolução pelos métodos euclidianos adotados só foi comprovada e demonstrada no século XIX, fruto do desenvolvimento da álgebra, após quase dois milênios de estudos sobre os problemas pelos próprios gregos.

Metodologia

Fizemos um estudo de tópicos preparatórios relevantes para então utilizarmos o conhecimento adquirido na abordagem do tema central dos problemas gregos. Estudamos sistemas numéricos, métodos de prova por contradição, conceito de limite, representações decimais e vimos os conceitos de número reais e racionais como corpos. A partir de noções de cardinalidade e hierarquia de infinito, podemos trabalhar com os números irracionais.

Tendo esses conceitos e considerando sempre comprimentos como não negativos, definimos a ideia de construtibilidade, fundamental na tentativa de resolução dos três problemas gregos tratados.

Consideramos construir um segmento de determinado tamanho como possuir uma sequência finita de operações, a partir de um segmento já dado de comprimento unitário, com um compasso (deve ter pernas tão compridas quanto necessárias e suas construções devem possuir centro em um dado ponto e passar por outro determinado ponto) e uma régua não graduada (aquela que não pode ser usada para medir, porém pode ser utilizada para criar um segmento tão grande quanto for necessário que contenha dois pontos dados).

É bom notar que utilizamos compasso não colapsante (aquele que transfere medidas) para facilitar a construção das figuras, porém todas as construções feitas com compasso não colapsante poderiam ser feitas com o colapsante (aquele que não transfere medidas).

Consideramos as operações individuais feitas com régua e compasso como as seguintes **construções fundamentais**:

- Dado dois pontos, traçar uma reta indefinidamente grande que passe por eles.

- Dado dois pontos, traçar o segmento de linha que os conecta.

- Dado um ponto e um segmento de linha, traçar a circunferência que tem centro no ponto e raio igual ao comprimento do segmento de linha.

A partir desses conceitos, foi feito um estudo sobre os problemas em si. A duplicação do cubo trata de, a partir de um cubo, cuja aresta é dada por um segmento de reta, construir outro cujo volume é o dobro do volume do primeiro. Necessitou da utilização de conceitos de irracionalidade vistos.

Era necessário construir sua aresta, tendo apenas o segmento da aresta do cubo inicial e o segmento de comprimento igual a uma unidade. Ou seja, queríamos saber se a aresta do cubo que teria o dobro do volume do primeiro seria construtível. Vimos que o problema na verdade se transformou na construtibilidade do número $\sqrt[3]{2}$.

A trissecção do ângulo consiste em trissectar um ângulo dado. Ou seja, era preciso saber se era construtível o ângulo que possuia a terça parte da amplitude do ângulo que nos era fornecido. Para isso, utilizamos o conceito de construtibilidade de ângulo a partir do segmento de uma unidade e do comprimento que vale o cosseno do ângulo maior.

Já com um círculo de raio r de determinada área πr^2, queríamos construir um quadrado com a mesma área desse círculo. Este é o problema da quadratura do círculo. Ou seja, queríamos saber se o comprimento do segmento do lado do quadrado era construtível de acordo com as regras pré-estabelecidas de construção por régua e compasso. Esse problema se dividiu em duas partes. A última, porém, sobre o tratamento do número π como transcendente não foi abordada.

Para tal estudo, foi de grande importância o Teorema da Torre de Corpos, que é central para os estudos de impossibilidade:

Um número a é construtível se existe uma sequência finita Q de corpos F_j tal que $Q = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_N$, em que $a \in F_N$ e para cada $j(0 \leq j \leq N-1)$, F_{j+1} é uma extensão quadrática de F_j. A recíproca é verdadeira.

Conclusões

A importância destes problemas reside no fato de terem constituído ao longo dos tempos uma fonte muito rica de ideias e processos matemáticos, que foram sendo inventados nas sucessivas tentativas de resolução. Sendo exemplos de "Teoremas de Impossibilidade", provamos que para certa classe de problemas não há solução no âmbito de determinados métodos. Assim, o estudo da matemática grega e de sua herança é importante, pois foram elementos decisivos na formação do pensamento matemático ocidental.

Referências

HADLOCK, Charles Robert, **Field Theory and its Classical Problems**, The Mathematical Association of America, 340 p.