IDENTIFICANDO NÓS TOPOLÓGICOS E LEGENDREANOS

Alunos: Rodrigo Ming Zhou e Marcelo Manzo Alvim Torres
Orientador: Paul Alexander Schweitzer

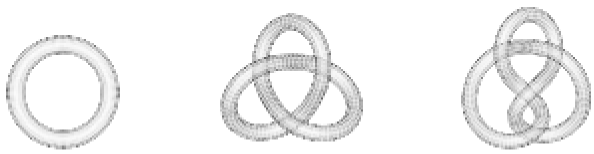
Introdução

Nós topológicos, quando "pequenos", podem ser verificados se são iguais, apesar de já ser difícil. Porém, conforme eles aumentam, a dificuldade de se verificar se são iguais ou não se torna praticamente impossível. Neste sentido, pensa-se em uma forma de identificar cada nó com alguma característica, os chamados invariantes topológicos. Uma das formas de se classificar é associar a cada nó um polinômio. Assim, cada nó está associado unicamente a um polinômio. Apesar da infinidade de polinômios, esta correspondência não é biunívoca, ou seja, um mesmo polinômio pode representar mais de um nó.

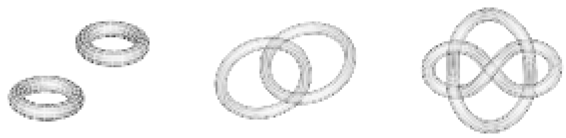
Neste trabalho, estudamos as várias formas de se identificar os nós, ou seja, de computar os seus invariantes, de forma intuitiva e fácil e desenvolvemos um programa que permite desenhar nós e calcular alguns destes invariantes topológicos associado ao nó desenhado.

Nós

Um nó, intuitivamente, é um entrelaço de uma corda no espaço e que suas pontas estão unidas. E um enlaçamento é uma união disjunta finita de nós; cada nó diz-se uma componente do enlace. Um nó diz-se ser orientado se possui uma orientação.



Nós: trivial, trevo e figura oito



Enlaces: trivial com duas componentes; anéis de Hopf; Whitehead

Dois nós são ditos isotópicos se é possível fazer uma deformação de um para outro sem "cortar" o nó. Desta forma, existem três movimentos que podem ser realizados para deformar nós chamados de movimentos de Reidemeister que mantém a isotopia do nó, ou seja, apesar de o nó ser diferente visualmente, ele continua sendo o mesmo.

Invariantes Clássicos

Os invariantes clássicos, ou invariantes numéricos, foram uma das primeiras formas de se identificar os nós e enlaces, porém estes também não possuem uma relação biunívoca.

Um invariante clássico é o número mínimo de cruzamentos que o nó possui. Apesar de parecer fácil de calcular para um determinado nó na forma como está, calcular o número mínimo é bem mais trabalhoso porque um mesmo nó pode ser deformado de forma que haja mais cruzamentos do que o necessário e encontrar a forma minimal do nó é bastante complicado.

Um segundo invariante clássico é o número mínimo de desatamentos necessários para torná-lo em um nó trivial, que pode novamente se tornar difícil por ser minimal.

Invariantes Polinomiais

Esta forma de invariante associa cada nó a um polinômio. A primeira forma de fazer tal associação se deve a J. Alexander e o polinômio se chama polinômio de Alexander. Durante um longo tempo este foi único polinômio a descrever nós orientados.

A seguir temos o polinômio de Conway, que introduz umas novas operações chamadas "skein". Este polinômio é definido recursivamente utilizando estas operações e tem como base o nó trivial. Os polinômios de Jones e HOMFLY também fazem uso destas operações e esta última é uma generalização do Conway e Jones.

E, por fim, temos os polinômios de Kauffman, com uma ideia totalmente diferente das anteriores, e que possuem relações com o polinômio de Jones.

Nós Legendreanos e seus Invariantes

Nós legendreanos são nós tangentes aos planos da estrutura de contato (em particular, trabalhamos com a estrutura de contato canônica). Diferentemente dos nós vistos anteriormente, nós legendreanos em R^3 possuem restrições quanto a sua projeção. E os invariantes relacionados a esta classe de nós são o número de Thurston-Bennequin e o número de Maslov (número de rotações) que podem ser facilmente calculados.

Por outro lado, os nós legendreanos em T^3 são trabalhados numa estrutura de contato bem mais complexa, que dificulta uma projeção em R^3. Além disso, a sua projeção em R^3 nem sempre é fechada, e, portanto, não valem os mesmos invariantes de Thurston-Bennequin e Maslov para nós legendreanos em R^3. O nosso estudo tenta definir estes mesmos invariantes, ou seja, tenta generalizar as ideias destes invariantes em R^3 para T^3.

Outros Invariantes

Um breve estudo foi realizado sobre a característica de Euler. Em geral, aplicamos a relação de Euler com poliedros convexos ($V – E + F = 2$), mas, na verdade, este é somente um caso particular do caso geral para superfícies de poliedros de qualquer tipo e ele é um invariante para cada tipo de superfície. Além disso, podemos relacionar com as singularidades de campos vetoriais sobre a superfície.

Referências

[1] DIAS, Sônia M. M. **Introdução à Teoria de Nós**. 2004. 123 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade do Minho, Braga, Portugal. 2004.

[2] ETNYRE, J. B. **Legendrian and Transversal Knots**. Disponível em: http://arxiv.org/pdf/math/0306256v2.pdf.

[3] KAUFFMAN, L. H. **New Invariants in the Theory of Knots**. *American Mathematical Monthly*, Vol. 95, Issue 3 (Mar., 1988), 195-242.

[4] PORTELA, Raquel R. B. **Nós Legendreanos em R^3 e o número máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2 pontes**. 2007. 109 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, PUC-Rio, Rio de Janeiro. 2007.

[5] SOUZA, Fábio S. **Nós Legendreanos em T^3**. 2007. 73 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2007.