TEORIA DO GRAU E APLICAÇÕES

Alunos: Clauson Carvalho da Silva e Fillipo de Souza Lima Impellizieri
Orientador: Ricardo Sá Earp

Introdução

Foi feito um estudo de conceitos centrais da topologia e da análise visando o entendimento da teoria do grau e suas aplicações.

Objetivos

Compreensão de importantes conceitos da topologia e da análise, tais como: Homotopia, retrações, funcional de Minkowski, projeção sobre um convexo fechado num espaço de Hilbert, variedades diferenciáveis, aplicações diferenciáveis entre variedades, diferencial de uma aplicação e grau de uma aplicação. Demonstração de resultados como o Teorema do Ponto fixo de Brouwer, o teorema de representação de Riesz, o grau de uma aplicação como invariante por homotopia entre outros.

Metodologia

Partindo da definição de homotopia entre aplicações contínuas, foram definidos os conceitos de equivalência homotópica entre espaços topológicos, espaços topológicos contráteis, retratos e retratos por deformação. Vários exemplos foram trabalhados visando o melhor entendimento desses conceitos como a equivalência homotópica entre o espaço R^n menos um ponto e a esfera S^{n-1}. Um resultado importante foi demonstrado: se o conjunto S^n admite um campo vetorial suave de vetores tangentes, então as aplicações antípoda e identidade são homotópicas.

A primeira meta atingida foi a demonstração das equivalências entre a não-contratibilidade da esfera S^n (para $n \geq 1$), o teorema de Bohl (Toda aplicação contínua da bola B^{n+1} em R^{n+1} possui um ponto fixo ou existe $x \in S^n$ tal que $x=kf(x)$, onde $k \in (0,1)$), o teorema do ponto-fixo de Brouwer e o teorema de Borsuk (Não existe retração de B^{n+1} em S^n).

Aprofundamos nossos estudos sobre conjuntos convexos com variantes geométricas de Hahn-Banach e sobre funcionais de Minkowski, chegando a uma caracterização de bolas para uma norma de um espaço vetorial normado de dimensão finita (Todo conjunto convexo, simétrico, limitado e fechado que contém a origem é bola fechada unitária referente a uma norma).

Em seguida, foram trabalhados conceitos e resultados importantes da Análise Funcional: com o teorema de representação de Riesz-Fréchet, demonstramos os teoremas de Stampacchia e Lax-Milgram.

Tendo feito isso, o trabalho se voltou para a área da topologia diferencial. Foram definidos os conceitos de variedades diferenciáveis e variedades diferenciáveis com bordo, difeormorfismos, espaço tangente a uma variedade em um dado ponto, aplicações suaves entre variedades, a diferencial de uma aplicação suave entre variedades, pontos críticos e valores críticos, pontos regulares e valores regulares. Em seguida, estudamos o teorema de Sard com o objetivo de ser aplicado no desenvolvimento da teoria do Grau.

Demonstramos que a imagem inversa de um valor regular por uma aplicação suave entre variedades é em si uma variedade diferenciável, e um resultado análogo quando o domínio de tal aplicação é uma variedade diferenciável com bordo. Foi demonstrado também que não existe retração de uma variedade diferenciável compacta com bordo em seu bordo, e que qualquer aplicação suave com domínio e contradomínio iguais a D^n(bola fechada unitária do R^n) possui um ponto fixo. Em seguida, usando o teorema da aproximação de Weierstrass para várias variáveis, estendemos este último resultado para o famoso teorema do ponto fixo de Brouwer, que reduz a hipótese de suavidade neste último enunciado à de continuidade. Tendo demonstrado o teorema do ponto fixo de Brouwer, todas as equivalências enunciadas como primeira meta ficam demonstradas.

Finalmente, foram definidas e estudadas as variedades diferenciáveis orientáveis com e sem bordo. Isso possibilitou a principal definição do estudo desenvolvido: o grau de uma aplicação diferenciável com domínio compacto e contradomínio conexo em dado valor regular. Este é definido como o somatório dos sinais das diferenciais em cada elemento da pré-imagem do valor regular. Demonstramos que o grau de uma aplicação independe da escolha do valor regular e que é invariante por homotopia. Usamos este último fato para mostrar que o conjunto S^n admite um campo suave de vetores tangentes se, e somente, se n é ímpar.

Conclusões

Esse estudo serviu para a aquisição de conceitos fundamentais da matemática. Além disso, contribuiu para o aprimoramento da capacidade de abstração dos alunos, pois exigiu o entendimento de conceitos mais complexos do que os até então estudados na graduação. Acrescentou ao repertório de teoremas por eles conhecidos, importantes resultados aplicáveis a diversas áreas da matemática. Por fim, capacitou aos alunos para que pudessem expor e redigir resultados matemáticos com devido rigor.

Referências

1 - OUTERELO & RUIZ, Enrique & Jesús M. (2009). **Mapping degree theory**. AMS.

2 - MILNOR, John. W. (1997). **Topology from the Differentiable Viewpoint**. Princeton University Press.

3- CARMO, Manfredo P. do, Geometria Riemanniana. Projeto Euclides, IMPA: 1988.