

O OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI DISCRETO E APLICAÇÕES EM MALHAS

Aluno: Alice Herrera de Figueiredo
Orientador: Sinésio Pesco

Introdução

Em computação gráfica, o operador de Laplace-Beltrami discreto tem diversas aplicações na geração e otimização geométrica de malhas. Entre as principais aplicações podemos destacar a suavização de malhas, edição de malhas, modelagem geométrica, reconstrução geométrica, geração de esqueletos, entre outras. Por essa diversidade de aplicações, e por ser um tema fundamental na área de computação gráfica, optamos por desenvolver um estudo de suas principais propriedades e implementar alguns exemplos que ilustrem essas aplicações.

Objetivos

O objetivo geral é estudar as propriedades do operador Laplace-Beltrami e sobre malhas. O objetivo específico é aplicar esse operador em um modelo de geração de esqueletos. Aqui usaremos o Laplaciano para realizar uma contração da malha ou de uma nuvem de pontos.

Metodologia

O projeto se iniciou com um levantamento bibliográfico do assunto, e em seguida um estudo do tema. Após esta introdução ao assunto, partimos para uma implementação computacional de uma das aplicações. Para implementação utilizamos as bibliotecas gráficas OpenGL. Através de reuniões semanais discutimos os principais tópicos do projeto, bem como o acompanhamento do desenvolvimento das atividades computacionais.

A aplicação que utilizamos foi a da Contração Geométrica [1], afim de utilizar o modelo de geração de esqueletos. Esta contração remove detalhes e ruídos da superfície triangular a partir da aplicação do Laplaciano que suaviza a malha. Para realizarmos esta contração aplicamos mínimos quadrados: minimizar $\|Ax - b\|$, onde A é a matriz abaixo, x é o resultado (no caso, as coordenadas dos novos vértices) e b é o vetor dos coeficientes conforme descrito abaixo:

$$A \quad x = b$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_L \mathbf{L} \\ \mathbf{W}_H \end{bmatrix} \mathbf{V}' = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{W}_H \mathbf{V} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{cases} \omega_{ij} = \cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij} & \text{if } (i, j) \in \mathbf{E} \\ \sum_{(i,k) \in \mathbf{E}}^k -\omega_{ik} & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

Temos que \mathbf{W}_h e \mathbf{W}_l são matrizes diagonais e suas condições iniciais são:

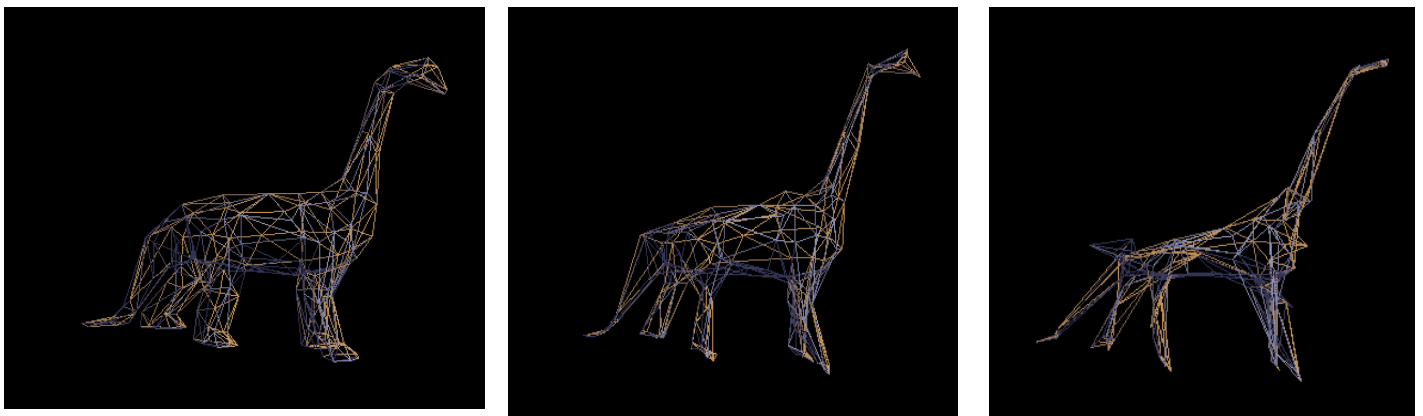
$$\mathbf{W}_L^0 = 10^{-3} \sqrt{A}, \quad \text{onde } A \text{ representa a área total da malha}$$

$$\mathbf{W}_H^0 = 1.0.$$

A cada iteração, resolvemos a equação mostrada acima, tendo como resultado os novos vértices, e depois é preciso atualizar os pesos e refazer a matriz L (pelo método Laplaciano):

$$\mathbf{W}_{H,i}^{t+1} = \mathbf{W}_{H,i}^0 \sqrt{A_i^0 / A_i^t},$$
$$\mathbf{W}_L^{t+1} = s_L \mathbf{W}_L^t$$

Abaixo temos uma sequência de imagens que mostram o efeito deste método sobre a malha de um modelo representando um dinossauro.



É possível perceber que a malha sofre uma contração tal que a cada iteração a malha se aproxima do esqueleto desejado.

Conclusões

Apesar de ainda não termos cumprido todas as etapas do projeto, já foi possível visualizar os primeiros resultados da aplicação do Laplaciano sobre a superfície triangular. Este trabalho cumpre dois objetivos importantes: além de estudar os conceitos matemáticos envolvidos, aplicamos esses conceitos no estudo de uma aplicação computacional, com a implementação e acompanhamento dos resultados obtidos.

Referências

1 - AU Oscar Kin-Chung, TAI Chiew-Lan, CHU Hung-Kuo, COHEN-OR Daniel, LEE Tong-Yee . Skeleton extraction by mesh contraction. **ACM Trans. Graph.**, v.27, n.3, Article 44, ago. 2008.